

群杭の極限水平抵抗に関する一解析法

(A Method of Limit Analysis for Laterally Loaded Pile Groups)

富永晃司* (Koji Tominaga)

山本春行** (Haruyuki Yamamoto)

山肩邦男*** (Kunio Yamagata)

キーワードズ：群杭／水平荷重／静的／設計／塑性

(I G C : E 4 / H 5)

1. はじめに

建築物の耐震設計に関する法令改正が昭和55年7月に公表され、建築構造物下の杭基礎に関しても極限状態における水平耐力、すなわち保有水平耐力を算定する必要が生じてきた¹⁾。しかし、この問題に対処できる解析法としては、今までのところ「建築基礎構造設計規準・同解説」²⁾に採用されている単杭に関するブロムス(Broms)の理論³⁾がある程度で、群杭に対しては適当な解析法が見当たらないのが現状である。

一方、現実の杭基礎の構成状態に注目してみれば、大径杭の場合を除いて単杭が用いられることは少なく、複数本の杭で構成されているのが一般である。このような杭基礎の水平抵抗挙動は、杭と杭が地中応力を介して相互に干渉する現象や単杭とは様相を異にした地盤の塑性化現象などがあるため、単杭とは違った性状を示す⁴⁾⁻⁶⁾。特に極限水平耐力に関しては、群杭の場合は単杭より小さな耐力を示し、いわゆる群杭効果としての耐力の低下が観察される⁷⁾。したがって、設計において群杭で構成する杭基礎のもつ極限水平耐力を扱う場合、群杭としての特性を考慮した解析法が必要となることは否定できない。

以上の状況に鑑み、筆者らはすでに文献⁸⁾において、前述した単杭に対するブロムスの解析法と考えを同じくした群杭の極限水平耐力に関する一算定法を提案した。本論文は、同文献の内容をさらに発展させたものであって、まず杭基礎のもつ極限水平耐力に支配的な要因となる塑性地盤反力について記述する。さらに塑性地盤反力に関して、群杭の基本である単杭については他の研究者が提案する理論式^{3),9),10)}との比較検討を

加えた。また群杭に関しては、文献¹¹⁾に報告されている実大杭の現場実験結果との比較検討を試みた。ついで、提案する極限解析法を誘導するにあたり、塑性論における「上界定理」および「下界定理」のいずれの定理に基づいても一致した解が得られることを示した。また、現実の群杭基礎を想定した種々の数値計算例に提案する解析法を適用し、解析結果から得られる群杭中の各杭の荷重分担率、降伏ヒンジの発生深さ、および群杭効率などの諸特性について考案を加えた。

2. 塑性地盤反力について

2.1 塑性地盤反力の提案式

杭頭に作用する水平荷重が漸増する場合、杭体の周辺地盤は初期のごく小さな荷重域では近似的に弾性的な挙動を示すが、ある荷重状態からは地表面近傍より塑性化が始まり、その後の荷重増大に対しては塑性化した領域が次第に深く進行してゆく進行性破壊の現象がある¹²⁾。このような杭体周辺地盤の塑性状態は、単杭に関しては一般的に次のように考えられている^{3),13)}。すなわち図1.(a)に示すように地表面近傍の土が塑性化する場合は、土被り圧が小さいために上方に向って三次元的な広がりをもって這り上がり(以後、この領域は塑性域Iと呼称する)、比較的深い所が塑性化する

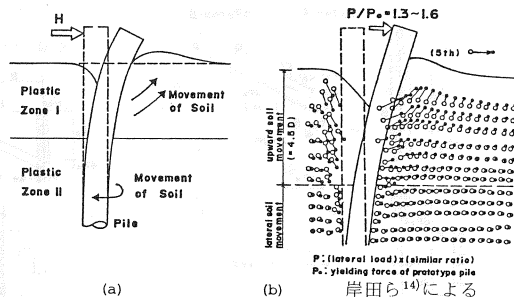


図1. 杭体周辺地盤の塑性状態

* 広島大学工学部第四類建設構造 講師, ** 同 助手, *** 関西大学工学部建築学科 教授

る場合は、土被り圧の押え効果により杭体前方の土が杭体の側方から後方へと水平方向のみに迂るように破壊する（同じく塑性域Ⅱと呼称する）。なおこれらの二つの領域の存在については、図1.(b)の例に示すように岸田ら¹⁴⁾のX線を用いた模型実験において観測されている。

これに対して群杭における杭体周辺地盤の塑性化は、筆者らの実施した模型実験の結果¹⁵⁾から単杭とは様相を異にしたものであることが分った。すなわち、群杭中の各杭に作用する塑性地盤反力は、その杭が占める位置および群杭を構成する杭の配置形状や間隔あるいは本数などの因子の違いによって異なった分布形状を示す。

以上の考察を基に、筆者らは文献⁴⁾において単杭で見られる塑性域ⅠおよびⅡの特性を考慮すると共に、群杭の構成因子である杭の配置形状・間隔・本数などの違いを合せ考えた群杭特有の塑性地盤反力式を提案した。以下に単杭、直列杭、並列杭および方形配列杭についての塑性地盤反力の基本的な考え方について述べ、誘導したそれぞれの塑性地盤反力式を示す。ただし、直列杭とは加力方向と同方向に一行に並んだ群杭、並列杭とは加力方向と直角方向に一行に並んだ群杭、および方形配列杭とは正方マトリックス的に配置された群杭をいう。

塑性域Ⅰに関しては、単杭ではマイヤーホッフ(Meyerhof)ら¹⁶⁾の紹介するブリンチ・ハンセン(Brinch-Hansen)¹⁰⁾の仮定した地盤の破壊モデル(後出図8.参照)を基に、図2.に示すように杭径と等しい幅をもつ土塊が迂り上がる破壊形状を仮定する。この破壊形式において、塑性深さが dZ_p 増加する場合の各力の増分値に対する鉛直方向および水平方向の釣合いか

ら塑性地盤反力式を導いた。群杭に対してこの方法を拡張し、適用する。

まず直列杭では図3.に示すように、杭の位置によって異なった土塊の破壊モデルを導入する。すなわち、最前方に位置する杭(a杭)は単杭と全く等しいが、後方の杭(b杭)は迂り線がその直前の杭に達するまでは単杭と等しく、それ以深の塑性化に対しては直前の杭の背面に至る間の梯形状の土塊が抵抗すると考えた。ただし、理論的には杭心まで土塊があるものと仮定した。また並列杭に関しては、杭間隔が十分大きい場合あるいは塑性深さが浅い場合には、個々の杭は単杭と同じ塑性地盤反力が作用すると考える。しかし、杭間隔がある程度小さい場合あるいは塑性深さが深い場合には、単杭としての土塊の側面に作用するせん断抵抗(図2.参照)が杭と杭との間に介在する土塊の抵抗より大きくなるので、図4.に示すように群杭前面の土全体がブロック的に迂り上がる塑性状態を考えた。さらに方形配列杭では、最前列の杭群は並列杭と同じ条件となる。しかし後方に位置する各杭列では、杭間隔と塑性深さの関係から直列の後方杭および並列杭としての塑性地盤反力と、図5.に示すような前方杭列までの土塊がブロック的に破壊するとして得られる塑性地盤反力と較べ、これらのうちの最小の値を採用す

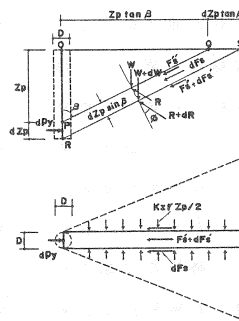


図2. 単杭

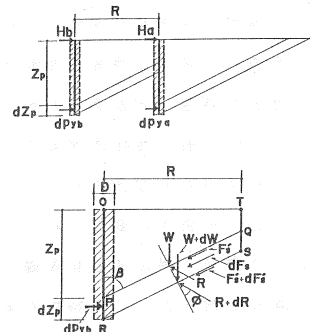


図3. 直列杭

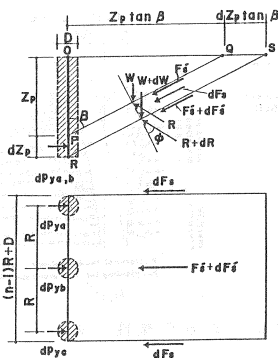
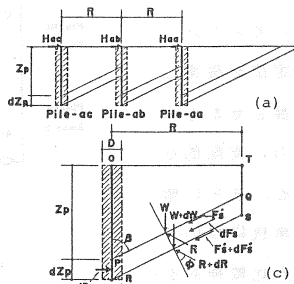
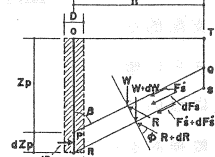


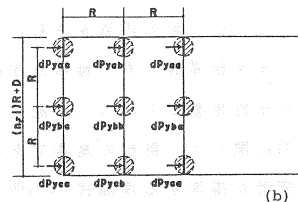
図4. 並列杭



(a)



(b)



(c)

図5. 方形配列杭

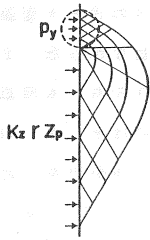


図 6. 塑性域 II (砂質土地盤)

表 1. 粘性土地盤の塑性域 II における破壊モデル (プロムス³⁾)

SLIP FIELD PATTERN	SURFACE	ULTIMATE LATERAL RESISTANCE, Q_{ult}/C_u
	ROUGH	12.56
	ROUGH	11.42
	SMOOTH	11.42
	SMOOTH	9.14
	SMOOTH	8.28

ることとした。

一方塑性域 II に関しては、単杭では土質条件によって破壊形式が異なったものとなる^{3), 13)}。ここに筆者らは、砂質土地盤ではマイヤー・ホッフ (Meyerhof) ら¹⁶⁾の考えが理論的に確立されたものであると判断し、図 6. に示すような帯状のフーチングの支持力式を水平方向に置換した式を採用した。また粘性土地盤では、岸田ら¹³⁾の検討結果やチェボタリオフ (Tschebotarioff)¹⁷⁾の紹介するマッケンジー (Mackenzie)¹⁸⁾のアンカーブロックの引き抜き実験の結果から判断して、プロムス³⁾が提案したように表 1. に示す表面が滑らかな円形杭が実状に合っていると考え、彼の提案式を採用した。

群杭の場合、塑性域 II の発生は土質条件や群杭の構成条件などが複雑に関係するが、文献⁴⁾で詳述したごとく理論的には砂質土地盤では塑性域 II の発生はなく、また粘性土地盤においては、杭間隔が杭径の約 2.4 倍以下であれば同領域を考えなければならない。

以上の考えから、それぞれの塑性地盤反力式を導いた。これらの結果をまとめて、表 2. に示しておいた。ただし、実際の解析では対象とする杭基礎において、生じ得る全ての破壊形式を考えてこれらに適合する表 2. の式から得られる塑性地盤反力のうちの最小値を包絡した分布値が採用される。

2.2 単杭の塑性地盤反力に関する他の提案式との

表 2. 塑性地盤反力式

領域	杭の配置形状	提案式
塑性域 I	単杭	$P_{yI} = K_z \gamma \sin \beta \tan \phi (\tan \beta + \cot \alpha) Z_p^2 + \{\gamma D \tan \beta \cot \alpha + 2 C_u \sin \beta \times (\tan \beta + \cot \alpha)\} Z_p + C_u D (\tan \beta + \cot \alpha)$ (*1)
	直列後方杭	$P_{yI} = 2 K_z \gamma R \tan \phi \cos \beta (\tan \beta + \cot \alpha) Z_p + \gamma R D \cot \alpha + 2 C_u R \cos \beta \times (\tan \beta + \cot \alpha) - K_z \gamma R^2 \cot \beta \cos \beta \tan \phi (\tan \beta + \cot \alpha)$ (*3)
	並列杭	$P_{yI} = 1/n_r K_z \gamma \sin \beta \tan \phi (\tan \beta + \cot \alpha) Z_p^2 + \{\gamma [(1-1/n_r) R + D/n_r] \tan \beta \cot \alpha + 2/n_r C_u \sin \beta (\tan \beta + \cot \alpha)\} Z_p + \{(1-1/n_r) R + D/n_r\} (\tan \beta + \cot \alpha) C_u$
	方形配列後方列杭	$P_{yI} = 2/n_r K_z \gamma R \tan \phi \cos \beta (\tan \beta + \cot \alpha) Z_p + \gamma R [(1-1/n_r) R + D/n_r] \cot \alpha + 2/n_r C_u R \cos \beta (\tan \beta + \cot \alpha) - 1/n_r K_z \gamma R^2 \cot \beta \cos \beta \tan \phi (\tan \beta + \cot \alpha)$
領域	土質条件	提案式
塑性域 II	砂質土地盤	$P_{yII} = K_0 \gamma D N_q Z_p$ (*2)
	粘性土地盤	$P_{yII} = 9 C_u D$
記号の説明	P_{yI} : 塑性域 I における塑性地盤反力	$\alpha = \pi/4 - \phi/2$
	P_{yII} : 塑性域 II における塑性地盤反力	$\beta = \pi/4 + \phi/2$
	C_u : 土の粘着力	$N_q = G \phi \cdot N \phi$
	ϕ : 土の内部摩擦角	$G \phi$: 係数
	K_z : 側圧係数	$N \phi$: 流れ値 (= $\tan^2 \beta$)
	K_0 : 静止土圧係数	D : 杭径
γ : 土の単位体積重量	R : 杭の中心間隔	
Z_p : 塑性深さ	n_r : 加力方向と直角な杭列中の杭本数	

比較検討

単杭に関する塑性地盤反力については、前述したようにかなり研究が進んでおり、その理論化もこれまでにプロムス³⁾、リース (Reese) ら⁹⁾ およびプリンチ・ハンセン¹⁰⁾ などによってなされている。これに対して、群杭においては前節で示した筆者らの理論がある程度で、他に全く見あたらないのが現状である。

このような研究状況を踏まえて、本節では単杭の塑性地盤反力の理論式に対象をしばり、他の研究者らが提案した塑性地盤反力式による分布値と比較検討し、筆者らの提案する理論式の占める位置を明らかにする。まずプロムスは、砂質土地盤¹⁹⁾と粘性土地盤²⁰⁾に分類して、他の研究者が行った実験結果や塑性論的な検討結果を総合し、かつ工学的な判断から塑性域 I および II の区別なく、以下に示すそれぞれの塑性地盤反力式を提案した³⁾。

○ 砂質土地盤 : $P_y = 3 K_p \gamma D Z_p$ (1)

○ 粘性土地盤 : $P_y = 9 C_u D$ (2)

ここに、 K_p はランキンの受働土圧係数である。なお (1) 式および (2) 式における他の記号、および以下の各式において記号の説明を省略したものについては、表 2. を参照されたい。

つぎにリースら⁹⁾は、図 7. に示すような三次元的な土塊の沈みを想定し、この土塊に作用する力の鉛直方

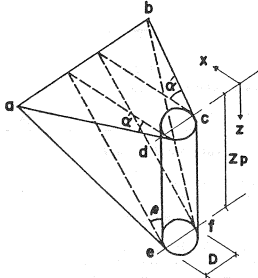


図7. リースら⁹⁾による地盤の破壊モデル

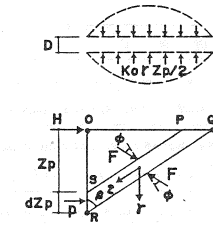


図8. プリンチ・ハンセン¹⁰⁾による地盤の破壊モデル

向と水平方向の釣合いより塑性地盤反力を導き、次式を提案した。

$$P_y = \{ 2K_0 \tan \phi \sin \beta + \tan \alpha' (\tan^2 \beta - K_0) \} \cdot \tan \beta \gamma Z_p^2 + (\tan^2 \beta - \tan^2 \alpha) D \gamma Z_p \quad (3)$$

ここに、 K_0 は静止土圧係数であり、リースらは 0.6 を推奨している。また α' は、杭前面の抵抗土塊の平面的な広がり角度で、 $\alpha' = \phi/2$ である。

さらにプリンチ・ハンセン¹⁰⁾は、砂質土地盤に対して図8に示すような地盤の破壊モデルを想定し、対象とする深さ Z_p における受働抵抗と土塊の微小要素の両側面(図のPQR S面)に働くせん断抵抗を合算した次式を与えた。

$$P_y = K_0 \gamma \tan \phi \tan \beta \sin \beta Z_p^2 + \gamma D K_p \cos \delta Z_p \quad (4)$$

ここに、 δ は杭体表面と地盤間の摩擦角である。

以上に示した各提案式と、筆者らの提案する理論式(表2の(*1)式および(*2)式)によって計算した塑性地盤反力の深さ方向の分布値を比較して、図9に示した。ただし、計算は砂質土地盤($C_u=0$)で、内部摩擦角 $\phi=30^\circ$ および 40° の二列について行った。なお粘性土地盤($\phi=0^\circ$)については、プリンチ・ハンセンの理論は適用できなく、さらにリースらの提案式は本理

論の塑性域 I の式(以後、塑性域 I 式と略記)と一致し、かつ塑性域 II に関してはプロムスの式と本理論式が一致するため、特に比較検討は行わなかった。また、(3)式の K_0 にはリースの推奨する 0.6 を、本理論式の側圧係数 K_z および(4)式の K_0 にはヤーキー(Jaky)の提案する静止土圧係数 $K_0 = 1 - \sin \phi$ ²¹⁾ を、および(4)式の δ には 0° を用いた。

図9より、いずれの ϕ 値に対しても全般的にリースらの提案式が最大で、プリンチ・ハンセンの式が最小の分布を示すこと、ならびに塑性域 I 式(図中の破線)とプロムスの式は、これらの中間的な分布値を与えることなどが分る。さらに、塑性域 I 式とプロムスの式による分布値についてみれば、地表面から杭径の10倍までの間では両者の占める面積がほぼ一致したものになることが読みとれる。また、本理論による塑性地盤反力は、前述したように塑性域 I と II の値を較べて小さい方が採用されるが、これらの両領域の境界深さは、 $\phi=30^\circ$ で杭径の約7倍、 $\phi=40^\circ$ で約1.6倍と ϕ の増加に対して急速に深くなることが判明した。

上記の各提案式の比較においてそれぞれの分布値間に相違が見られたが、これは仮定した地盤の破壊モデルの違いによるものである。水平加力された単杭の周辺地盤の破壊状態は、現実には2.1節で示したように平面的な広がりをもつ三次元的な土塊の迂り現象によるものであり、この破壊状態は筆者らの実施した現場実験の結果²²⁾からも推測できる。したがって地盤の破壊モデルとしては、図7に示したリースらのモデルがより現実に則しているといえる。これに対して、図8のプリンチ・ハンセンのモデル、および特に群杭への拡張・適用を考慮した本理論の塑性域 I のモデル(図2.参照)は、現実のものとは若干遊離したものとな

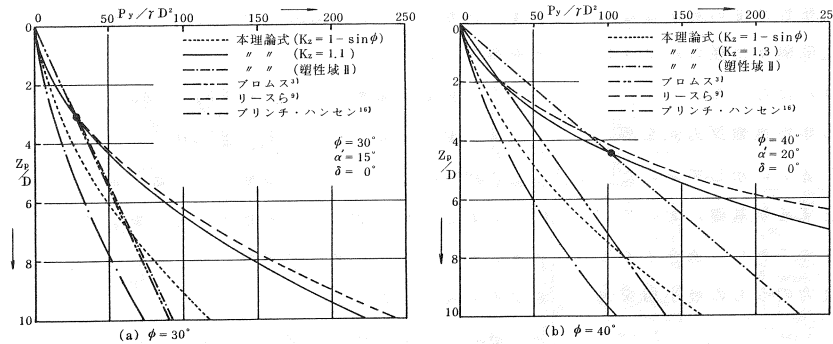


図9. 塑性地盤反力分布の比較

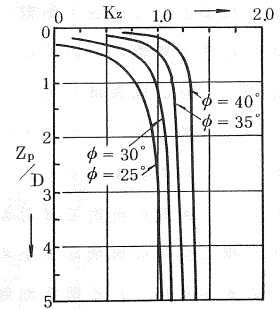


図10. 側圧係数 K_z の分布

群杭の極限水平抵抗に関する一解析法

ている。しかし本理論の破壊モデルにおいても、図7.の角度 α' で広がった三次元的な部分の土塊の抵抗に対して、図2.の土塊の側面に作用するせん断抵抗値($K_z \cdot \gamma Z_p / 2$)、ひいては側圧係数 K_z を適切に評価すれば、現実に近いリースらの提案値に近似した分布値を定めることが可能となる。この考えからリースらの提案式を基準とした場合、本理論の K_z がどのような値もつか、以下に検討を加えてみた。(3)式および表2の(*1)式において、 $C_u=0$ として両式を等しいとおけば、 K_z に関する次式が導かれる。

$$K_z = \frac{(\tan \beta \cot \alpha' - K_0) \tan \beta \tan \alpha' - \tan^2 \alpha / (Z_p / D)}{(\tan \beta + \cot \alpha) \tan \phi \sin \beta} + K_0 \quad (5)$$

上式において、 ϕ をパラメーターにして K_z の深さ方向の分布を描いたのが、図10.である。ただし、式中の K_0 にはリースらの推奨する0.6を用いた。この図より、 K_z の分布値は ϕ が増大すれば大きくなることおよび杭径の約3倍以深では K_z 値はほぼ一定となることなどが読みとれる。また、地表面より杭径の5倍までの深さにおいて、 K_z の占める面積をこの深さで除した平均値は、 $\phi = 30^\circ$ で約1.1および $\phi = 40^\circ$ で約1.3となることが分った。これらの K_z の平均値を用いて、図9.の例について塑性域I式を再計算した結果を同図中の実線で示してある。この結果より、上記のようにして求めた K_z の平均値を本理論に適用すれば、リースの提案式による塑性地盤反力に等価な分布値を定められることが分った。

2.3 現場実験結果との比較検討

本節では提案する塑性地盤反力式が、現場における

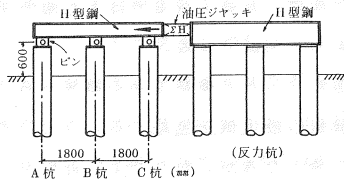


図12. 実験装置および杭配置図

表3. 杭の諸元 (tf = 9.8 kN)

	記号 (単位)	数 値
杭 径	D (m)	0.610
肉 厚	t (m)	0.016 0.012 0.009 (上杭) (中杭) (下杭)
曲げ剛性	EI (tf·m ²)	2.12 × 10 ⁴
根入れ長さ	L (m)	16.5
加力点高さ	h (m)	0.6

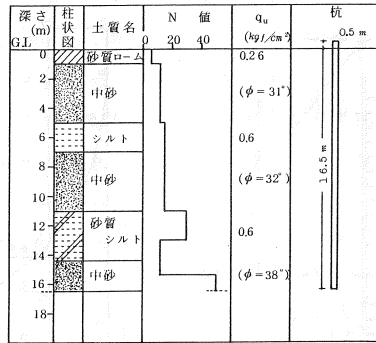


図11. 実験地盤の概要および杭姿図 (Kgf/cm² = 98 kPa)

実大群杭の水平加力試験結果から得られる実験値をどの程度説明できるか、その妥当性について検証する。

解析で対象とした実験は、文献¹¹⁾で報告されている直列3本群杭の水平加力試験である。同文献を引用すれば、この実験が実施された地盤の概要および杭姿などは図11.に示すごとくであり、また実験装置および杭配置等は、図12.に示すようである。用いられた杭は表3.の諸元をもつ鋼管杭で、打撃工法により設置されている。加力方法としては多サイクル方式が採用され、加力点および杭頭変位の測定点はそれぞれGL+0.6mおよびGL+0.4mである。これらの実験結果のうち、A杭とC杭(図12.参照)における曲げモーメントの深さ方向分布を図13.に引用して示しておく。

杭に作用する地盤反力は、曲げひずみの測定値から算定される曲げモーメント分布を深さ方向に2回微分すれば、求めることができる。しかしこの方法では、微分の過程でかなりの誤差が入るので、正確な地盤反力の算定は困難である。したがって、塑性地盤反力の実験値の評価法としてなるべく誤差が入らないように、

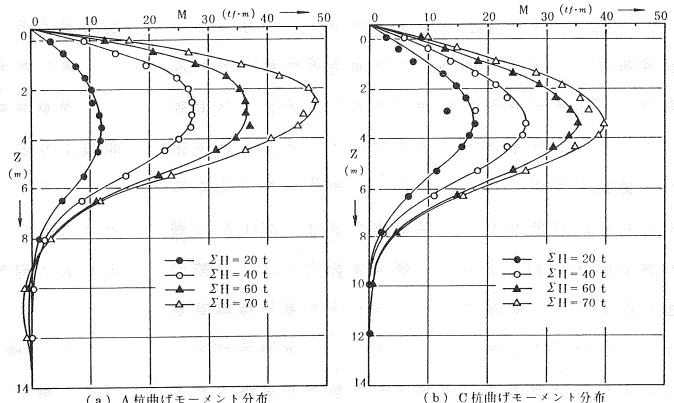


図13. 曲げモーメントの深さ方向分布 (tf = 9.8 kN)

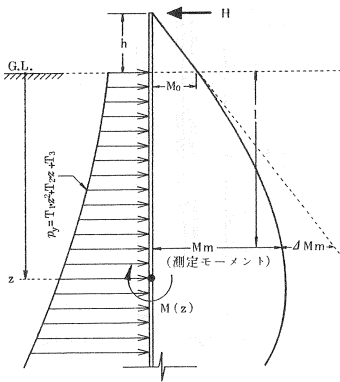
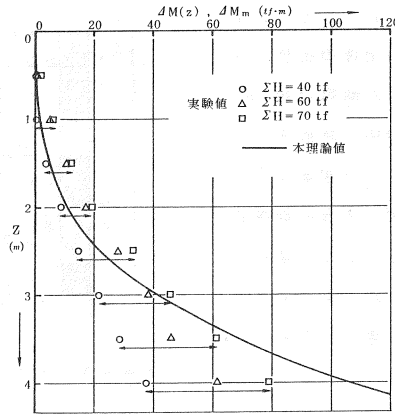
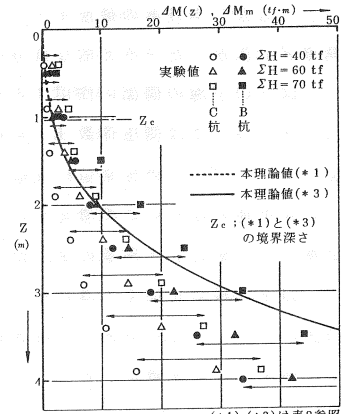


図14. ΔMmの深さ方向分布概念図



(a) A杭のΔM分布



(b) B杭およびC杭のΔM分布

図15. ΔM(z), ΔMmの深さ方向分布の比較 (tf=9.8 KN)

以下に示す算定法を考え、この方法による実測値と本理論値との比較検討を行うこととした。

図14.において、杭頭にHの荷重が作用するとき地盤反力を無視すれば、点線で示すように曲げモーメントは深さ方向に直線分布となる。一方、杭体に本理論の塑性地盤反力 P_y が作用しているとすれば、深さZにおいて点線の分布値より減少する曲げモーメント量、 $\Delta M(Z)$ は次式で算定できる。

$$\Delta M(z) = \frac{t_1}{12} Z^4 + \frac{t_2}{6} Z^3 + \frac{t_3}{2} Z^2 \quad (6)$$

ここに、 t_1 、 t_2 および t_3 は表2.における塑性地盤反力式が、一般式として深さZの二次関数で表示されることを考慮して $P_y = t_1 Z^2 + t_2 Z + t_3$ とおいた各係数である。一方、曲げモーメントの実測値を用いれば、上記の減少曲げモーメント量は ΔM_m として次式のように表わされる。

$$\Delta M_m = M_0 (1 + Z/h) - M_m \quad (7)$$

ここに、 M_0 および M_m は地表面位置および深さZでの実測曲げモーメント値で、 h は加力点の高さである。

提案する塑性地盤反力を適用する(6)式および実測曲げモーメントによる(7)式を用いて、それぞれ上述した実験結果を解析した。ただし、塑性地盤反力を算定するために必要な土の内部摩擦角 ϕ は、図11.の上層部の測定値 $\phi = 31^\circ$ を用い、側圧係数 K_z は2.2節の考察から $K_z = 1.1$ を採用した。また土の単位体積重量 γ は、 1.8 tf/m^3 と仮定した。さらに、実測曲げモーメントとしては文献¹¹⁾に実測された数値が掲載されていなかったため、図13.に示した分布図から読みとった。

したがって、以下に示す実験値にはある程度の読み取り誤差があることは否めない。

これらの解析結果を比較して、図15.に示した。なお直列群杭の場合、図3.に示すように理論的には加力方向の最前方の杭以外は、全て等しい塑性地盤反力となる。したがって、B杭およびC杭(図12.参照)は、同図(b)にまとめて示している。また実験値において対象とした荷重は、地盤の塑性化を検討する目的から最大荷重の約半分の40tfから最大荷重の70tfまでである。この図より、いずれの杭においても比較的浅い領域(A杭ではGL-約3.0m, B杭ではGL-約1.0m およびC杭ではGL-約2.0m まで)では、60tfから最大荷重までの荷重増分に対して実験値は、ほとんど変化していないことが読みとれる、このことより、この領域では地盤が塑性化しているものと推測できる。ただし、それ以降では最大荷重に達しても実験値は増加する傾向が見られ、実験で作用した最大荷重では未だ塑性状態に至っていないものと判断できる。

上述した地盤が塑性化したと推測できる領域において、理論曲線は実験値の最大値を包絡するような分布曲線より若干低目の値となるが、かなりよい近似を示していることが分る。この一例をもって結論を下すことはできないが、提案する理論式は現実の塑性地盤反力のある程度説明でき、妥当性があるとみてよからう。

3. 極限解析法

3.1 解析法の基本的仮定

本論文では、プロムス³⁾が単杭に関して定義した長

い杭のみを対象とし、地盤の破壊だけで極限状態が決定される短い杭は対象から除いた。この条件に基づいて、提案する解析法を誘導するにあたり、以下の仮定をおいた。

- 1). 杭体は完全剛塑性体と仮定し、降伏ヒンジ点では降伏曲げモーメント M_y のもとで無制限塑性流れが生じる。
 - 2). 杭頭は剛なフーチング等で連結されているとし、杭頭水平変位 y は全ての杭で等しいものとする。ただし、フーチング等の回転は無視する。
 - 3). 崩壊形は全ての杭において、杭頭がピン結合（以後、杭頭ピンと略記）の場合は地中部に降伏ヒンジが発生したとき、また杭頭が剛結（以後、杭頭固定と略記）の場合は杭頭と地中部の双方に降伏ヒンジが発生したときとする。なお文献⁵⁾において、杭頭固定で杭体が弾性状態の場合は杭頭の曲げモーメントが地中部の最大曲げモーメントより常に大となることが示されている。したがって、対象とする杭における杭頭ヒンジの発生は、常に杭頭部の後に地中部に生じると仮定する。
 - 4). 地中部に発生する降伏ヒンジ点以浅では、地盤は塑性化しているものとする。
- 3.2 解の誘導および結果の式

塑性論における「上界定理」および「下界定理」のそれぞれの定理に基づき、前節の基本的仮定の下に群杭の水平抵抗に関する極限解析法の一般式を導くこととする。図16.に示す群杭の例を用いて、以下にそれぞれの誘導過程を示し、かつ両者による一般式が等しくなることを示す。

まず「上界定理」によれば、崩壊荷重は変形機構条件を満たす運動的許容速度場における全ての可能な崩壊形式に対して、仮想変位の原理から計算される荷重

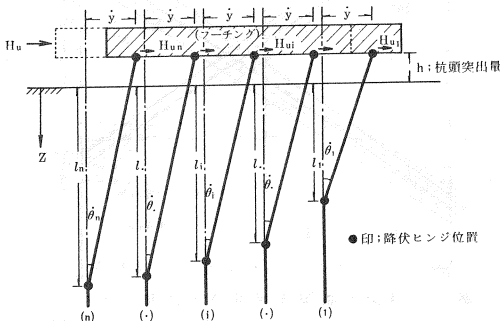


図 16. 群杭の崩壊モデル

のうちの最小のものと定義される。ここに、任意の杭例えば図16.の i 杭において、杭体のもつ降伏曲げモーメントを M_{yi} および杭頭の降伏曲げモーメントを M_{yhi} とし、さらに i 杭に作用する杭頭荷重を H_{ui} および塑性地盤反力を $P_{yi}(z)$ とおけば、仮想仕事は次式となる。

$$\Sigma(H_{ui} \dot{\theta}_i(l_i+h)) - \Sigma\left(\int_0^{l_i} \dot{\theta}_i(l_i-z) P_{yi}(z) dz\right) = \Sigma(M_{yi} \dot{\theta}_i) + \Sigma(M_{yhi} \dot{\theta}_i) \quad (8)$$

ただし、 Σ は全ての杭についての総和、 l_i は i 杭の地中部降伏ヒンジ位置までの深さ、 h は地表面さら荷重の作用点までの高さ、および $\dot{\theta}_i$ は i 杭の降伏ヒンジの回転角速度である。なお上式は杭頭固定の場合であるが、杭頭ピンの場合は $M_{yhi} = 0$ とおけばよい。

一方、 $\dot{\theta}_i$ は杭頭の変位速度 \dot{y} をもって幾何学的関係から、次式のように表わされる（図16.参照）。

$$\dot{\theta}_i = \dot{y} / (l_i + h) \quad (9)$$

上式を(8)式に代入すれば、次式が導かれる。

$$\Sigma(H_{ui})\dot{y} = \Sigma\left(\frac{1}{l_i+h} (l_i \int_0^{l_i} P_{yi}(z) dz + M_{yi} + M_{yhi}) \dot{y} - \int_0^{l_i} P_{yi}(z) z dz \dot{y}\right) \quad (10)$$

(10)式において、 $H_u = \Sigma(H_{ui})$ とおき、 l_i に関する H_u の最小値をとれば、 i 杭の降伏ヒンジ発生深さを決定する式が求められる。すなわち(10)式に関しての $\partial H_u / \partial l_i$ は、

$$\frac{\partial H_u}{\partial l_i} = -\frac{1}{(l_i+h)^2} (l_i \int_0^{l_i} P_{yi}(z) dz - \int_0^{l_i} P_{yi}(z) z dz) + \frac{1}{l_i+h} \int_0^{l_i} P_{yi}(z) dz - \frac{M_{yi} + M_{yhi}}{(l_i+h)^2} \quad (11)$$

であるので、 $\partial H_u / \partial l_i = 0$ より次式が与えられる。

$$\int_0^{l_i} P_{yi}(z) z dz + h \int_0^{l_i} P_{yi}(z) dz - (M_{yi} + M_{yhi}) = 0 \quad (12)$$

上式は、 i 杭の降伏ヒンジ深さ l_i に関する方程式であるが、他の全ての杭についても同様の方程式が求められるので、これらを(10)式に代入すれば全極限水平抵抗力を与える次式が導かれる。

$$H_u = \Sigma\left(\int_0^{l_i} P_{yi}(z) dz\right) \quad (13)$$

つぎに「下界定理」によれば、崩壊荷重は平衡条件および塑性条件を満たす静的許容応力場における全ての応力分布から得られる荷重のうちの最大なものと定義される。ここに、図16.の i 杭に関して、3.1節の基

本的仮定より杭頭部が降伏曲げモーメント M_{yhi} に達しており、杭頭に荷重 H_{ui} が作用しているとすれば、深さ Z における曲げモーメント M_{zi} は次式で表わされる。ただし、前述したように杭頭ピンの場合は、 $M_{yhi} = 0$ とおけばよい。

$$M_{zi} = H_{ui}(z+h) - M_{yhi} - z \int_0^z P_{yi}(z) dz + \int_0^z P_{yi}(z) dz \quad (14)$$

上式を基に、最大曲げモーメントを生じる位置は、以下のごとく定められる。

$$\text{まず } dM_{zi}/dz = 0 \text{ として、} H_{ui} \text{ を導けば次式となる。}$$

$$H_{ui} = \int_0^z P_{yi}(z) dz \quad (15)$$

つぎに、上式の H_{ui} を(14)式に代入し、得られた地中部の最大曲げモーメントが降伏曲げモーメント M_{yi} に一致するとおけば、次式が求められる。

$$\int_0^z P_{yi}(z) z dz + h \int_0^z P_{yi}(z) dz - (M_{yi} + M_{yhi}) = 0 \quad (16)$$

上式の Z に関する方程式の解が、最大曲げモーメントを生じる位置、すなわち降伏ヒンジ発生深さ l_i である。したがって、他の杭についても同様に降伏ヒンジ発生深さが定められるので、これらを(15)式に代入して総和を求めれば、次式の全極限水平抵抗力を得る。

$$H_u = \sum \left(\int_0^{l_i} P_{yi}(z) dz \right) \quad (17)$$

以上の結果より、塑性ヒンジ発生深さに関する(12)式と $Z = l_i$ とおいた(16)式、および全極限水平抵抗力に関する(13)式と(17)式が一致しており、「上界定理」と「下界定理」の両定理から一致した解が得られることが分る。

4. 数値計算例および解析結果の考察

4.1 数値計算例

現在、一般的に用いられている杭（本報告では、特に鋼管杭を対象とした）および地盤を想定した種々の計算モデルについて、提案した極限解析法を適用して得られる群杭効率、地中部降伏ヒンジ発生点深さおよび杭頭分担荷重などの諸特性について考察を加えた。これらの解析に供した数値計算モデルは、以下のごとくである。

地盤は、砂質土地盤とした。その理由は、本解析値

に大きな影響を与える塑性地盤反力は、群杭を構成する因子の変化によって粘性土地盤 ($\phi = 0^\circ$) より砂質土地盤 ($C_u = 0$) の方が大きく影響され、群杭の特徴が顕著に現われることを考慮したためである。なお、砂質土地盤の内部摩擦角 ϕ は 20° 、 30° および 40° の三種類としたが、特に群杭の諸特性については $\phi = 30^\circ$ の場合のみを考察の対象として選んだ。また対象とした杭は鋼管杭であるが、文献²³⁾によれば現在一般に使用されている鋼管杭は、そのほとんどが杭径約 0.4 m から 1.5 m の範囲にある。したがって、大径杭（本報告では $D = 1.0$ m 以上とおく）を除いて考えれば、杭体の降伏曲げモーメント M_y は約 25 tf·m から 400 tf·m の範囲にあることが分る。この考察から、次節で示す降伏曲げモーメントの無次元量 $\bar{M}_y (= M_y / rD^4)$ の現実の杭が占める範囲は、約 500 ~ 8000 とみてよい。さらに群杭を構成する諸因子として、配置形状は方形配列を、杭間隔 R は杭径 D の 2.0 倍から 10.0 倍の範囲を、および杭本数は 2×2 、 3×3 、 4×4 および 5×5 の四ケースを選定した。

4.2 解析結果とその考察

前節に示した数値計算モデルに、提案した極限解析法を適用した。ただし、塑性地盤反力を算定するに際して、側圧係数 K_z は 2.2 節の検討結果を基に $\phi = 20^\circ$ 、 30° および 40° に対してそれぞれ 0.9、1.1 および 1.3 を用いた。

これらの解析結果のうち、まず群杭の基本となる単杭に関して、本理論値とブロムスの理論値との関係について検討を加えてみる。なお以下に示す各図は、一

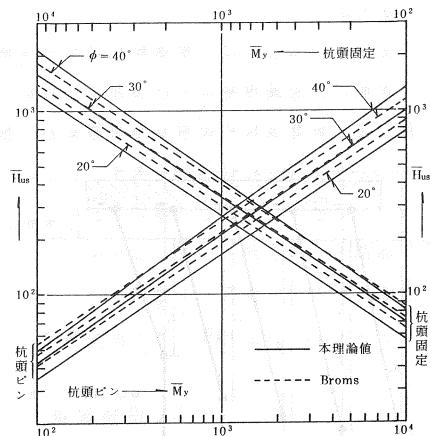


図 17. 単杭の極限水平抵抗力に関する本理論値とブロムスの理論値との比較

群杭の極限水平抵抗に関する一解析法

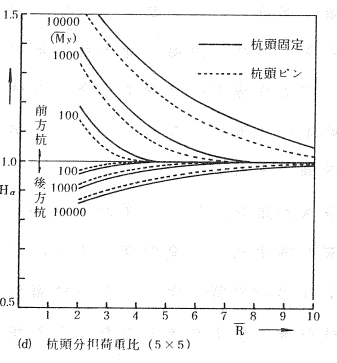
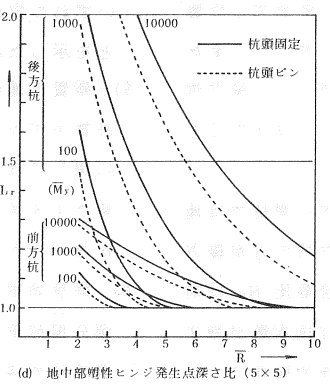
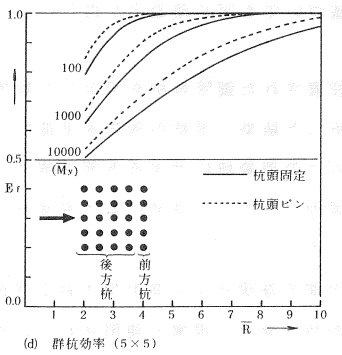
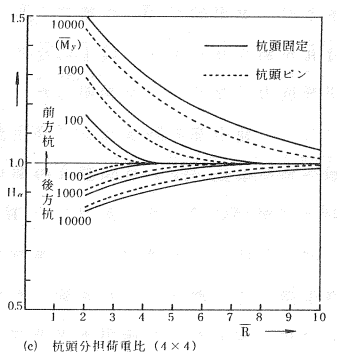
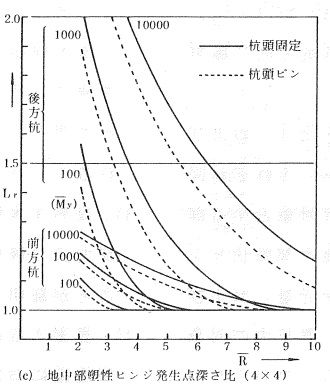
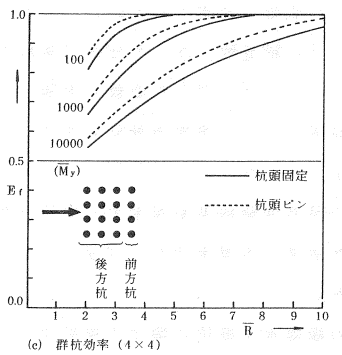
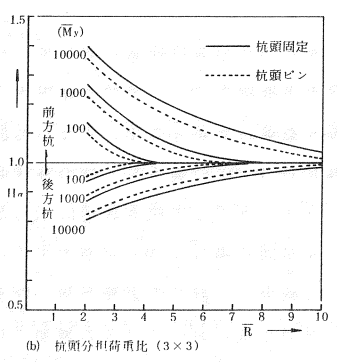
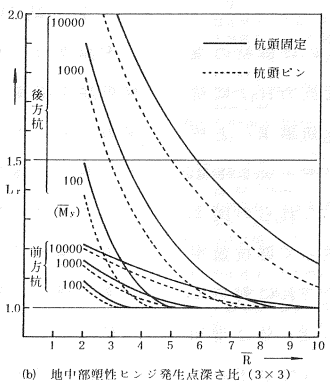
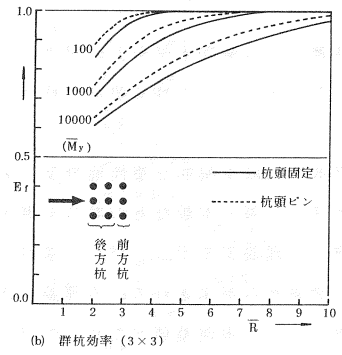
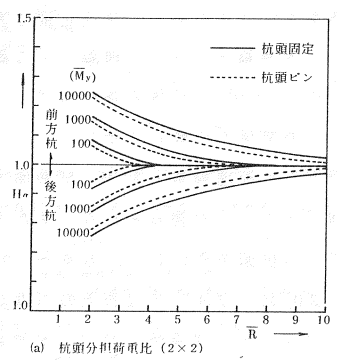
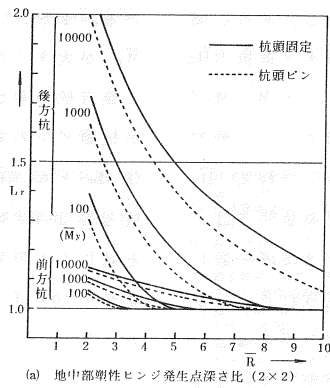
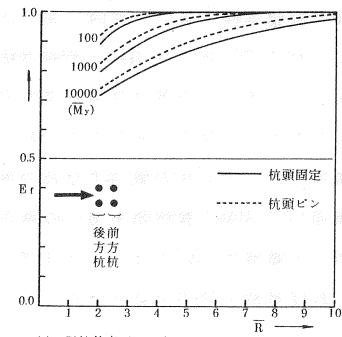


図 18. $E_r \sim \bar{R}$ 関係図

図 19. $L_r \sim \bar{R}$ 関係図

図 20. $H_a \sim \bar{R}$ 関係図

一般性をもたせるため全て無次元量で表示してある。図17に、本理論とプロムス理論による極限水平抵抗力 \bar{H}_u ($=H_u/\gamma D^3$)と杭体の降伏曲げモーメント \bar{M}_y ($M_y/\gamma D^4$)の関係を比較して示した。この図より、一般的傾向として両理論値とも \bar{M}_y が増加するにつれて、 \bar{H}_u は増大することが読みとれる。また両理論値間では、いずれの杭頭条件においても $\phi = 30^\circ$ ではほぼ一致し、 $\phi = 20^\circ$ および 40° では若干の相違が見られる。しかし、プロムスの理論値に対する本理論値の誤差は、 $\pm 15\%$ 程度であり、工学的にみて有意な差でないことが分った。

つぎに群杭の各特性値に関して、図18には群杭の全極限水平抵抗力 H_u と単杭の極限水平抵抗力 H_{us} に杭本数 n を乗じた値との比、すなわち群杭効率 E_f と杭間隔 \bar{R} ($=R/D$)の関係を、杭の降伏曲げモーメント \bar{M}_y をパラメータとして杭本数別に示した。これらの図より、 \bar{R} が同じ場合は \bar{M}_y が増大するに従って群杭効率 E_f は減少し、群杭の影響が強くなる。これに対して、 \bar{M}_y が同じ杭においては \bar{R} の増加に伴い E_f 値は増加し、杭頭の条件および杭本数の違いによって若干の差はあるが、実用的な \bar{M}_y の範囲 ($\bar{M}_y = 500 \sim 8000$) では \bar{R} が約5.0～10.0以上になると単杭と同じ極限水平抵抗力となることが判明した。

さらに、地中部の降伏ヒンジ発生深さ比 L_r および杭頭分担荷重比 H_α と杭間隔 \bar{R} の関係を、それぞれ図19および図20に示した。ただし、 L_r は対象とする群杭と同じ条件の下で算定された単杭の地中部降伏ヒンジ発生深さで、群杭のそれを除した無次元量、および H_α は杭一本あたりの極限水平抵抗力で群杭中の対象とする杭のそれを除した無次元量である。なおこれらの値は理論的には、群杭中の加力方向の最前列に位置する全ての杭（以後、前方杭と称す）で等しく、また前方杭より後方に位置する全ての杭（同じく、後方杭と称す）で等しくなる。これらの図より、以下のことが指摘できる。

全体的傾向として、 \bar{R} および \bar{M}_y が同じ群杭では地中部の降伏ヒンジ発生深さ比 L_r は前方杭の方が後方杭より浅い位置に生じ、かつ杭頭分担荷重比 H_α は前方杭が後方杭より大となり、この傾向は杭本数が増すにつれて顕著となる。なおこれらの定性的傾向は、文献⁷⁾で報告されている実験結果においても観察されて

いる。また、いずれの杭頭条件においても同じ \bar{R} では \bar{M}_y が大きくなるにつれて L_r および H_α とも前方杭と後方杭の差が拡大していき、この差は杭頭固定の方が杭頭ピンの場合よりも大きくなる。さらに L_r および H_α とも、 \bar{R} の増加に伴って1.0の値、すなわち単杭と等しい状態に漸近していき、群杭効率 E_f の場合と同じく実用的な \bar{M}_y の範囲においては、 \bar{R} がほぼ5.0から10.0以上になれば単杭と同等と見なせることが分った。

5. 結語

本論文は、群杭基礎のもつ極限水平耐力に関する一解析法を提案したものであって、内容を要約すれば以下のごとくである。

- 1). 群杭の極限水平抵抗力に支配的な塑性地盤反力として、杭の配置形状・間隔・本数などの群杭を構成する諸因子を考慮した理論式を示し、群杭の基本である単杭に関して従来から提案されている理論と比較検討した。結果として、本理論値がこれらの提案値のほぼ中間的な分布値を示すことが分った。
- 2). 本理論で仮定した地盤の破壊モデルにおいても、土塊の側面に働くせん断抵抗、ひいては側圧係数 K_a を適切に評価すれば、現実にもつた地盤の破壊モデルを想定した理論値と等価な塑性地盤反力を与えられることが明らかとなった。
- 3). 直列3本群杭の現場実験結果を提案する塑性地盤反力式で解析した結果、本提案式がほぼ妥当であることが証明された。
- 4). 提案する群杭の極限水平抵抗に関する解析法は、塑性論における「上界定理」および「下界定理」のいずれの定理に基づいても同じ理論式が得られることを示した。
- 5). 砂質土地盤に設置された鋼管群杭を想定した数値計算モデルを解析した結果、単杭の極限水平抵抗力に関してはプロムスの理論値に対する本理論値は、約 $\pm 15\%$ の誤差内にあり、工学的にみて有意な差がないことが分った。
- 6). 群杭効率、地中部の降伏ヒンジ発生深さおよび杭頭分担荷重などの特性値は、現実にも使用されている鋼管杭の降伏曲げモーメント M_y の占める範囲 ($M_y = 25 \text{ tf}\cdot\text{m} \sim 400 \text{ tf}\cdot\text{m}$) では、杭間隔 R が杭径 D

群杭の極限水平抵抗に関する一解析法

の約 5.0 倍から 10.0 倍以上あれば、単杭とほぼ同程度の値となることが判明した。

謝 辞

本論文を執筆するにあたって、多大な御協力を得ました広島大学工学部文部技官原田誠一氏に謝意を表します。

記 号 の 説 明

- C_u : 土の粘着力
- D : 杭径
- E_r : 群杭効率 (= $H_u / H_{us} \cdot n$)
- E_I : 杭の曲げ剛性
- H : 杭頭に作用する水平荷重
- H_u : 群杭の全極限水平力
- H_{ui} : i 杭の極限水平力
- H_{us} : 単杭の極限水平力
- H_s : 極限分担荷重比
- h : 加力点高さ
- K_0 : 静止土圧係数
- K_p : ランキンの受働土圧係数
- K_s : 側圧係数
- L : 杭の根入れ長
- L_r : 降伏ヒンジ発生深さ比
- L_i : i 杭の降伏ヒンジ発生深さ
- M_0 : 地表面位置における実測曲げモーメント
- M_m : 深さ Z における実測曲げモーメント
- M_{yi} : i 杭の降伏曲げモーメント
- M_{yhi} : i 杭の杭頭降伏曲げモーメント
- JM : 理論による減少曲げモーメント
- JM_m : 実測による減少曲げモーメント
- n : 群杭の総本数
- n_r : 加力方向と直角方向の杭列における総本数
- N_q : 支持力係数 (= $G \cdot N_0$)
- $G \phi$: 係数
- $N \phi$: 流れ値 (= $\tan^2(\pi/4 + \phi/2)$)
- P_{yI} : 塑性域 I における塑性地盤反力
- P_{yII} : 塑性域 II における塑性地盤反力
- R : 杭の中心間隔
- t : 杭の肉厚
- $t_{1,2,3}$: 塑性地盤反力の係数
- \dot{y} : 杭頭の変位速度
- Z : 深さ
- Z_p : 塑性深さ
- dZ_p : 塑性深さ増分
- α : $\pi/4 - \phi/2$
- α' : 抵抗土塊の平面的な広がり角度 (= $\phi/2$)
- β : $\pi/4 + \phi/2$

- γ : 土の単位体積重量
- δ : 杭体と地盤間の摩擦角
- ϕ : 土の内部摩擦角
- ϕ_i : i 杭の降伏ヒンジの回転角速度

参 考 文 献

- 1) 日本建築学会 (1981): 建築耐震設計における保有耐力と変形性能, 日本建築学会, pp.1~38.
- 2) 日本建築学会 (1976): 建築基礎構造設計標準・同解説, 日本建築学会, pp.260~274.
- 3) B.B.Broms (1965): "Design of Laterally Loaded Piles," Proc. ASCE, Vol.91, No. SM4, pp.79~99.
- 4) 富永見司, 山肩邦男 (1982): 地盤の塑性状態を考慮した群ぐいの水平抵抗理論—その1. 塑性地盤反力について—, 日本建築学会論文報告集, 第317号, pp.32~40.
- 5) 富永見司, 山肩邦男 (1982): 地盤の塑性状態を考慮した群ぐいの水平抵抗理論—その2. 理論および実験結果との比較検討—, 日本建築学会論文報告集, 第321号, pp.89~96.
- 6) 富永見司, 山肩邦男 (1983): 砂地盤中の模型群ぐいに関する実験結果の理論的考察, 日本建築学会論文報告集, 第326号, pp.68~77.
- 7) 高橋敏夫 (1979): 模型群ぐいの水平抵抗に関する実験的研究, 関西大学工学部修士論文.
- 8) 富永見司, 山肩邦男 (1982): 群杭の保有水平耐力に関する一算定法について, 日本建築学会大会学術講演梗概集.
- 9) L.G.Reese and F.Parker (1970): "Experimental and Analytical Studies of Behavior of Single Piles in Sand under Lateral and Axial Loading," Research Report 117-2, Center for Highway Research, the University of Texas, pp.1~251.
- 10) J.Brinch-Hansen (1961): "The Ultimate Resistance of Rigid Piles against Transversal Forces," Danish Geotech Institute Copenhagen, Bulletin 12 (文献¹⁰による)
- 11) 建築業協会 (1979): 杭の水平載荷試験結果に関する調査報告書, 建築業協会, pp.621~636.
- 12) 山肩邦男, 富永見司 (1971): クイの水平加力試験における横抵抗土圧と弾塑性解析法, 第6回土質工学研究発表会講演集, pp.1169~1170.
- 13) 岸田英明・中井正一 (1977): 地盤反力—変位関係の非線形性, 土と基礎, Vol.25, No.8, pp.21~28.
- 14) 岸田英明・小林勝己, 佐々木俊平 (1981): 水平力を受ける模型杭周辺地盤の変形, 第16回土質工学発表講演集, pp.1001~1004.
- 15) 山肩邦男, 富永見司, 高橋敏夫 (1977): 砂地盤における模型群ぐいの水平加力試験について, (その8: 実験概要と結果の考察), 日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.2077~2078.
- 16) G.G.Meyerhof and Gopal Ranjan (1972): "The Bearing Capacity of Rigid Piles under Inclined Load in Sand, I: Vertical Piles," Canadian Geotechnical Journal, Vol.9, pp.430~446.
- 17) G.P.Tshebotarioff (1973): Foundation, Retaining and Earth Structures, Mc-Graw-Hill, pp.536~548.
- 18) T.R.Mackenzie (1955): "Strength of Dedman Anchors in Clay," Master's Thesis, Princeton Univ. (文献¹¹による)
- 19) B.B.Broms (1964): "Lateral Resistance of Piles in Cohesionless Soils," ASCE, Vol.90, No. SM3, pp.123~156.
- 20) B.B.Broms (1964): "Lateral Resistance of Piles in Cohesive Soils," ASCE, Vol.90, No. SM2, pp.27~63.
- 21) 吉見吉昭 (1967): 建築構造学大系3「土質力学」, 彰国社, pp.129~131.
- 22) 日本建築学会近畿支部千島市街地住宅基礎調査特別委員会編 (1973): 日本住宅公団千島市街地住宅第一期工事現場における基礎関係の実験実測調査の結果に関する報告.
- 23) 大西靖和, 高野晴夫, 高橋邦夫 (1979): 杭の水平載荷試験の現状, 杭の水平載荷試験法に関するシンポジウム発表論文集, 土質工学会, pp.3~13.