

## スライス法の妥当性に関する議論の終焉のために

To Terminate the Discussion about the Validity of Slice Methods

榎 明潔 Meiketsu ENOKI (鳥取大学工学部)



斜面の安定解析法として、極限平衡法の1種であるスライス法が数多く提案されてきた。そして、どの方法が正しいかという議論が70年間以上続いている。ここでは、まず極限平衡法とスライス法、著者が提案している「一般化された極限平衡法(GLEM)」を紹介する。そして、極限平衡法で離散化表現しようとしている理論が、類似した基礎式を用いるすべり線法ではないかという立場から、極限平衡法が満たすべき条件を調べる。また、極限平衡法で行う最適化の物理的意味をGLEMの場合について考える。最後に、スライス間面力仮定の妥当性を論じ、スライス法ではすべり線法の近似解は一般的には表現できないことを示す。

キーワード：塑性理論，極限平衡法，スライス法，支持力，斜面安定 (IGC：E-2, E-3, E-8)

## 1. はじめに

1936年に斜面の安定解析法として簡便分割法<sup>3)</sup>が提案されて以来、今までに100を超える、提案者の名を冠したスライス法が提案されている。スライス法が有限要素法や差分法と類似の離散化手法であることは間違いないが、分割を無限に細かくするとどの理論になるのかわからない。

著者はスライス法を一般化して発展させた「一般化された極限平衡法 (Generalized Limit Equilibrium Method, 以下 GLEM と略称する)」を提案してきたが、GLEMですべり線法の近似解を求めることのできる理由を調べる過程で、スライス法の意味が明らかになった。結論から述べると、以下の通りである。

1. スライス間力についての仮定として破壊条件式を適用した場合のみが、上界解を与える。
2. GLEMのように、さらにスライス間面(の傾斜)を変えて安全率や支持力を最小化した場合には、Kötter 式のようなすべり線法の上界側の近似解を与える。
3. それ以外のスライス法ではすべり線法の近似解を得ることはできない。またモーメントのつりあいを満たせない。

本論文では、まず、スライス法の歴史とこのような混乱の生じた背景を紹介し、次にこの結論を得た過程を簡単に示す。詳細については、参考文献1)を参照されたい。

## 2. 極限平衡法とスライス法

## 2.1 クーロンの土圧解法

土質力学書に登場する極限平衡法の例は、クーロンの土圧解法である。もっとも、極限平衡法の歴史はもっと

古くに遡ることができ<sup>2)</sup>、クーロンが創始者ではないようである。極限平衡法の原理をクーロンの土圧解法を用いて簡単に紹介する。

図-1に示す直立壁の受動土圧問題(「働」でなく「動」を使う理由は参考文献1)参照)で、滑らかな壁面に作用する水平力が増加して、三角形土塊が底部のすべり面に沿ってまさにずり上がる極限状態にあるとする。三角形土塊に作用する力は平衡状態にあるはずだから、次の平衡条件が成立する。

<水平方向の力のつりあい式>

$$P_p = T \cdot \sin \theta + N \cdot \cos \theta \quad (1)$$

<鉛直方向の力のつりあい式>

$$W + H \tan \theta = N \cdot \sin \theta - T \cdot \cos \theta \quad (2)$$

一方、すべり面では土のせん断強度が完全に発揮されているはずであるから、次の破壊規準(極限条件とも呼ぶ)が成立する。

<すべり面での破壊条件式>

$$T = N \cdot \tan \phi + c \cdot H / \cos \theta \quad (3)$$

ここで、 $W = \gamma H^2 \tan \theta / 2$  は幾何条件であるパラメータ  $\theta$  が与えられれば既知であるから、上の3式は、3個の未知数  $P_p$ ,  $T$ ,  $N$  を含む線形の連立方程式であり、静定である。目的の  $P_p$  について解くと、次式を得る。

$$P_p = \frac{H}{\tan \theta - \phi} \left[ \left( \frac{\gamma \cdot H}{2} + q \right) \tan \theta + c \{ 1 + \tan \theta \cdot \tan(\theta - \phi) \} \right] \quad (4)$$

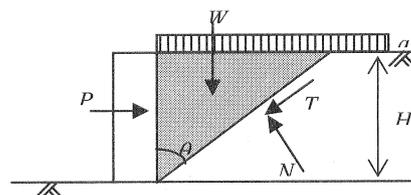


図-1 クーロンの方法による受動土圧の解法

最も簡単な  $c = q = 0$  のとき、 $P_p$  をくさび型土塊の幾何形状、すなわち  $\theta$  に対して最小化する ( $dP_p/d\theta = 0$  と置く) と、 $\theta = \pi/4 + \phi/2$ 、および、受動土圧力  $P_p$  が次式で得られる。

$$P_p = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \quad (5)$$

**スライス法**

極限平衡法が不静定問題になるのは、斜面安定を論じる簡便分割法で複数のスライスに対して用いられたときに始まる。

図-2において、スライス数を  $n$  とすると、未知数の数と式の数はいずれも表-1 のようになり、 $n-1$  個の式が不足し、クーロンの土圧解法のように静定にならない。しかし、これは斜面安定問題であったからではなく、複数の土塊（スライス）を対象にしたからである。これは、図-1で3角形土塊を2個に分割して、式数と未知数の数を比較すると同じ問題が生じることから分かる。各スライスでモーメントのつりあい式も考えると、式数が  $n$  個増えるが、未知数として各面での垂直力の作用点  $2n-1$  個が加わるので、かえって不静定次数は上がる。

これを解決するために多くの研究者が導入したのが、ちょうど  $n-1$  個あるスライス間面で、垂直力とせん断力の関係式を仮定することである。その例を図-3に示す。

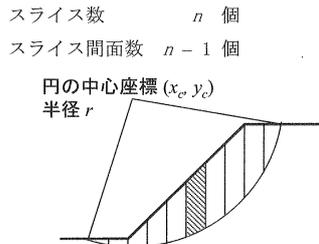


図-2 スライス分割

表-1 スライス法における式の数と未知数の数

式	個数	未知数	個数
平衡条件式	$2n$	スライス底面垂直力 $N$	$n$
破壊条件式	$n$	せん断力 $T$	$n$
		スライス側面垂直力 $H$	$n-1$
		せん断力 $V$	$n-1$
		安全率 $F_s$	1
合計	$3n$	合計	$4n-1$
不足式数	$n-1$		

図中では、スライスの左側面力と右側面力の合力の水平、鉛直成分をそれぞれ  $dH$ ,  $dV$  と表わしている。

(a)簡便分割法<sup>3)</sup>では一般にはあるスライスに作用する左右の側面力のベクトル和がスライス底面に平行(図の  $\theta$  方向)であると仮定されていると解釈されているが、その仮定では、式の数の方が底面の個数と同じだけ増えるので、式の数の方が多問題になってしまう。著者は、各スライスの安全率について一種の重みつき平均を取っていると解釈している。(b)簡易 Bishop 法<sup>4)</sup>と(c)簡易 Janbu

スライスに作用する力 (a)簡便分割法 (b)簡易ビショップ法 (c)簡易ヤンブ法

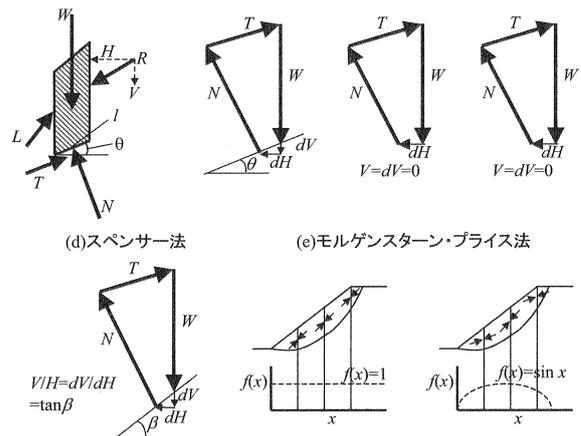


図-3 各種のスライス法で用いられるスライス側面力に関する仮定

法<sup>5)</sup>ではどちらも左右の側面力の和が鉛直成分を持たないと仮定されているが、これは全ての側面力  $V$  がゼロと仮定されているのと等しい。なお、(b)は円形すべり面にのみ用いられる。(d)Spencer 法<sup>6)</sup>ではスライス側面力がある方向(図の  $\beta$  方向)を向いていると仮定されている。しばしば厳密な方法と言われる(e)Morgenstern-Price 法<sup>7)</sup>ではスライス側面力の方向がスライス間面の位置の関数である、すなわち  $V/H$  がスライス面の位置  $x$  の関数  $f(x)$  であると仮定し、「スライス間面力の分布がもっとも妥当となるように」トライアルにこの関数の形を決める(図中の  $f(x)=1$  や  $f(x)=\sin x$  など)としている。著者は、これらの仮定には論理的にも力学的にも厳密性・合理性がないと考えているが、この議論は後に行う。

また、すべり面を円形と仮定するか任意形状とするかの相違は、幾何条件を変えて安全率を最小化するときすべり面を表わす幾何条件を何個の変数で表現するかという問題であり、本質的な差ではない。円形の場合には中心の座標と半径という3個の変数になるが、任意すべり面とすると、スライス間面の下端点の  $y$  座標と、すべり面と地表面との交点の  $x$  座標の  $n+1$  個の変数になる。

**3. 各種塑性論との比較のための準備**

スライス法の元となる理論を探す時、用いているつりあい式や破壊条件式から、まず候補としてすべり線法や上・下界法を挙げるのは自然である。ところが、すべり線法や上・下界法には、極限力(極限支持力や受動・主動土圧力)という概念はあるが、スライス法で用いる安全率という概念がない。また、スライス法は専ら斜面の安全率を求めるために用いられており、極限力を求めるためには用いられていない。

このため、スライス法とすべり線法や上・下界法を比較しようとしても、現状では同じ基準で論じられない。そこで、本章では、基準を揃えるための検討を行う。

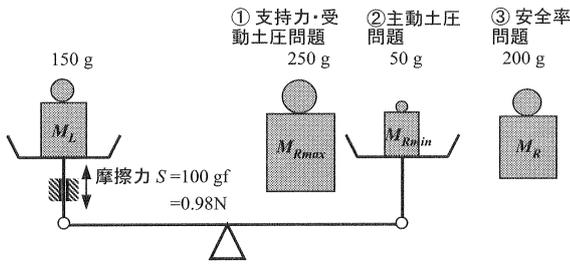


図-4 フリステリアノビチの天秤モデル<sup>8)</sup>

### 3.1 極限力問題と安全率問題 (天秤モデル)

すべり線法の研究者として有名なソコロフスキーが紹介したフリステリアノビチの天秤モデル<sup>8)</sup>によって、極限力と安全率の関係について考えてみる。

この図-4に示すモデルは、左側の皿の軸に摩擦のある上皿天秤で、左の皿にはすべり土塊の土の自重を表わす錘  $M_L$  (例えば 150g) が載せられている。摩擦  $S$  は土のせん断抵抗 (例えば 100g) を表わしている。右の皿に載せられた錘  $M_R$  が、塑性理論の目的として求めるべき極限力である。

彼等は、つりあいを保ったままで右の皿に載せられる最大荷重 ( $M_{R\max} = M_L + S$ : 250g) を求める問題が「支持力・受動土圧」問題に対応し、右の皿に載せられる最小荷重 ( $M_{R\min} = M_L - S$ : 50g) を求める問題が「主動土圧」問題に対応していることを示した。この対応関係は、図-1のクーロンの土圧理論で、土の自重やせん断強度の大小が土圧にどのように影響するかを考えると理解できる。

この天秤モデルで、右の皿に載っている荷重が上記最大荷重と最小荷重の間の値で既知 (例えば 200g) の時に摩擦部分の安全率を求める問題を考えると、これが斜面問題のような安全率を求める問題となる。安全率  $F_s$  を次式のように、摩擦抵抗の最大値  $S$  と実際に摩擦体に作用している力  $T$  の比と定義すると (この定義は後に変更するが)、この場合の安全率は2となる。

$$F_s = S/T \quad (6)$$

すなわち、すべり線法や上・下界法では安全率が1の場合の極限力を求めていたのであり、逆に既知の力を与えて安全率を求めることも可能であることが分かる。

#### 斜面問題における安全率の解釈

土の場合には、固有のせん断抵抗  $S$  は存在せず、固有なのは強度定数  $c, \phi$  である。そこで、式(6)の安全率の概念は、斜面安定解析では一般的に式(7)と解釈されている。

$$F_s = \frac{S}{T} = \frac{N \tan \phi + cA}{T} = \frac{\sigma \tan \phi + c}{\tau} \quad (7)$$

しかし、地盤内の1点の応力 ( $\sigma, \tau$ ) は、定義面を決めないと定まらず、応力状態はモール円全体でしか表わせない (不変量を用いる以外には表わせない) ことを考えると、土の場合に式(7)の代わりに式(8)の解釈をする方が妥当と考えられる。

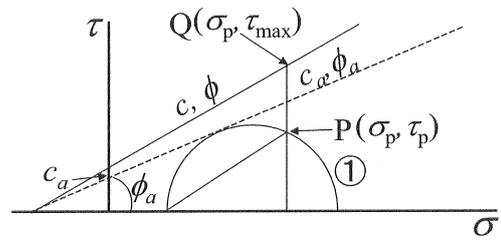


図-5 土のような  $c, \phi$  材における安全率の解釈

$$T = \frac{N \tan \phi + cA}{F_s} = N \frac{\tan \phi}{F_s} + \frac{c}{F_s} A \quad (8)$$

$$= \sigma \tan \phi_a + c_a A$$

ここで、 $\phi_a, c_a$  は、 $\phi_a = \tan^{-1}(\tan \phi / F_s)$ 、 $c_a = c / F_s$  なる「安全率で割り引いた見かけの (あるいは許容の) 強度定数」である。式(7)と式(8)に示す安全率の意味を図-5に示す。

式(7)では地盤内のある点での応力状態を表わすモール円①のうち、特定の面上の応力  $P(\sigma_p, \tau_p)$  とそれと同じ  $\sigma_p$  に対するせん断強度を与える  $Q(\sigma_p, \tau_{\max})$  に注目して、 $\tau_{\max} / \tau_p$  を安全率と考えている。一方、式(8)では、モール円全体を対象にして、破壊規準線をモール円に接するように (ただし、破壊規準線の  $\sigma$  軸切片は固定して) 引き直している。すなわち、安全率は「強度定数をどの程度まで割り引けば破壊が生じるか」を示すと考えている。

安全率が1である通常の破壊問題 (たとえば三軸圧縮試験) で、強度定数  $\phi$  によってすべり面の勾配が変化することを考えると、特定の面上の応力を対象にせず、モール円全体を対象とする式(8)の方が一般性を持つことは明らかである。ただし、式(7)を変形すると式(8)が得られるから、どちらの解釈を採っても安定解析の結果が変わるものではない。

このように強度定数を割り引く形で安全率を定義すると、支持力問題や土圧問題に対しても斜面安定問題と同じ定義の安全率を適用することが容易に可能になる<sup>1)</sup>。

#### スライス法を用いて極限支持力を求める

3.1と3.2の検討により、すべり線法や上・下界法を用いても安全率を求めることができるようになった。しかし、逆にスライス法は斜面の安全率を求める目的だけに用いられており、一般には、極限支持力や主動・受動土圧を求める目的には用いられていない。

Hansen<sup>9)</sup>は新たな極限平衡法を自ら提案するに際し、極限平衡法とすべり線法の類似に気付いて、図-6に示すような、 $N_q$ 問題 ( $c = 0, \phi = 30^\circ$ , 土の単位体積重量  $\gamma = 0$ , サーチャージ  $q = 1$ , 基礎幅  $B = 1$ ) と呼ばれる極限支持力問題における各種解析法の比較を行った。

ここで、スライス法で支持力問題を解く工夫を、簡便分割法で基礎下のスライスが1個という、図-7に示したような簡単な場合について述べると次の通りである。簡便分割法では安全率は次式となる。

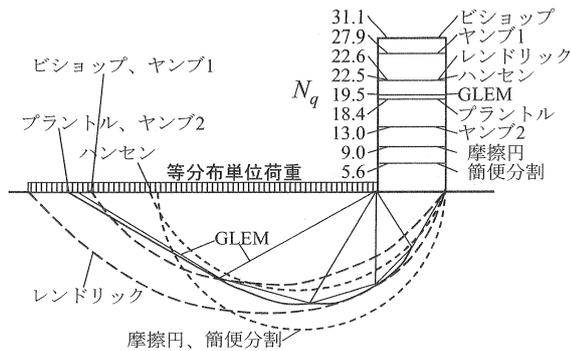


図-6 各種の解析法による極限支持力とすべり面 (ハンセンの図に加筆)

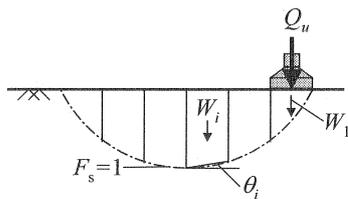


図-7 スライス法で極限支持力を求める工夫

$$F_s = \frac{\sum (W_i \cos \theta_i \tan \phi + c l_i)}{\sum W_i \sin \theta_i} \quad (9)$$

まず 3.1 で述べたように安全率は 1 であり、未知数はスライス上に載った荷重  $Q_u$  である。基礎が載っているスライスの重量をスライスの重量  $W_i$  と荷重  $Q_u$  の和に置き換えて、 $F_s = 1$  として、 $Q_u$  を求める形に整理すると式(10)を得る。

$$Q_u = \frac{\sum (W_i \cos \theta_i \tan \phi + c l_i) - \sum W_i \sin \theta_i}{\cos \theta_i \tan \phi} \quad (10)$$

この  $Q_u$  を最小化するようにすべり面を探せばよい。基礎下に  $n$  個のスライスがある場合には、それぞれ荷重  $Q_1 \sim Q_n$  を与え、 $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$  が最小になるようにすべり面を変化させる。

こうして、スライス法でも支持力問題を解けることになったが、図-6 を見ると、現在正解と考えられているプラントル解に対して、解析方法によって極限支持力が 1/3 から倍近くも異なることが分かる。なお、図-6 には次章で述べる GLEM による解も示している。

#### 4. 一般化された極限平衡法 GLEM

すべり線法や上・下界法とスライス法を比較してスライス法の意味を考える前に、著者がスライス法を一般化して提案している「一般化された極限平衡法(GLEM)」を紹介する<sup>10),11),12),13)</sup>。

この方法は、2.2 で述べたスライス法を、以下の点で一般化したものであるから、スライス法と全く同様の定式化ができる。

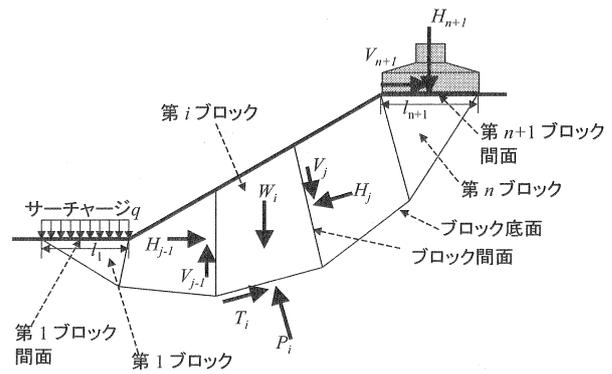


図-8 GLEM におけるブロック分割と作用力

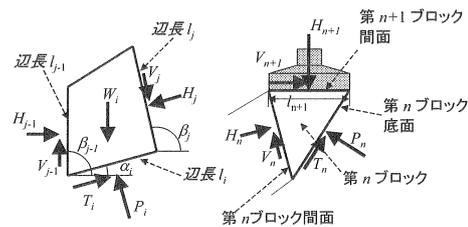


図-9 第  $i$  ブロックと第  $n$  ブロックに作用する力

- ① スライス法のように鉛直に分割したスライスだけでなく、任意の三角形や四角形のブロックを用いる。
- ② ブロック底面だけでなく、ブロック間面でも破壊条件を定義する。(安全率問題ではブロック底面だけでなく、ブロック間面でも同じ安全率を用いる。)
- ③ 土圧・支持力・安全率の最適化にあたっては、スライス法ではスライス間面は鉛直のままであるが、GLEM ではブロック間面の角度と長さも変化させる。ブロック底面を連ねたすべり面を外部すべり面、ブロック間面を内部すべり面と呼ぶ。
- ④ 外部すべり面を折れ線で近似するので、Janbu 法のように、円形だけでなく非円形すべり面を取り扱える。
- ⑤ 斜面安定・土圧・支持力などの問題に対し、すべて同一の定式化を行う。ただし、未知数は、土圧・支持力では外力であるが、斜面安定問題では強度定数に関する安全率である。

GLEM はエネルギーを用いて上界法としての定式化もできるが、両者は完全に同じ解を与える<sup>1)</sup>。

図-8 に示すように、斜面上に基礎があり、その基礎に鉛直荷重  $H_{n+1}$  と水平荷重  $V_{n+1}$  が作用している。斜面内には  $n$  個のブロックからなるすべり土塊が形成されており、極限平衡状態にあるとする。

ブロック群中の第  $i$  ブロックに作用する力は図-9 に示すとおりである。このブロックに極限平衡条件を適用すると次式を得る。

<ブロック底面に垂直方向の力のつりあい式>

$$-H_j \cdot \cos(\beta_j - \alpha_i) + V_j \cdot \sin(\beta_j - \alpha_i) + H_{j-1} \cdot \cos(\beta_{j-1} - \alpha_i) - V_{j-1} \cdot \sin(\beta_{j-1} - \alpha_i) + W_i \cdot \cos \alpha_i = P_i \quad (11)$$

<ブロック底面に平行方向の力のつりあい式>

$$H_j \cdot \sin(\beta_j - \alpha_i) + V_j \cdot \cos(\beta_j - \alpha_i) - H_{j-1} \cdot \sin(\beta_{j-1} - \alpha_i) - V_{j-1} \cdot \cos(\beta_{j-1} - \alpha_i) + W_i \cdot \sin \alpha_i = T_i \quad (12)$$

<破壊条件式>

ブロック底面において

$$T_i = (P_i \cdot \tan \phi + c \cdot l_i) / F_s \quad (13)$$

ブロック間面において

$$V_j = (H_j \tan \phi + c l_j) / F_s \quad (14)$$

この問題が、基礎の極限支持力  $H_{n+1}$  を求める支持力問題の場合には、式 (13) と (14) の  $F_s$  は 1 であり、第 1 ブロック間面に作用する  $V_1$  と  $H_1$  は上載荷重として与えられるから、未知数と式の個数は表-2 のようになり、静定問題である。そして、式 (11) ~ (14) は未知数である  $N, T, H, V$  に関して線形の連立方程式となっている。

表-2 GLEMにおける式の数と未知数の数

式	個数	未知数	個数
平衡条件式	$2n$	ブロック底面 垂直力 $P$	$n$
破壊条件式		せん断力 $T$	$n$
ブロック底面	$n$	ブロック間面 垂直力 $H$	$n$
ブロック間面	$n$	せん断力 $V$	$n$
合計	$4n$	合計	$4n$

一方、この問題が、基礎へ既知の荷重を与えて安全率  $F_s$  を求める問題の場合なら、 $H_{n+1}$  が既知である代わりに、式 (13) と (14) に現われる  $F_s$  が未知となるだけで、やはり静定問題である。ただし、この場合には、式 (13) と (14) が未知数である  $H_j$  と  $F_s$  に対して線形でないので、 $F_s$  をトライアルに決めるような解法が必要となる。

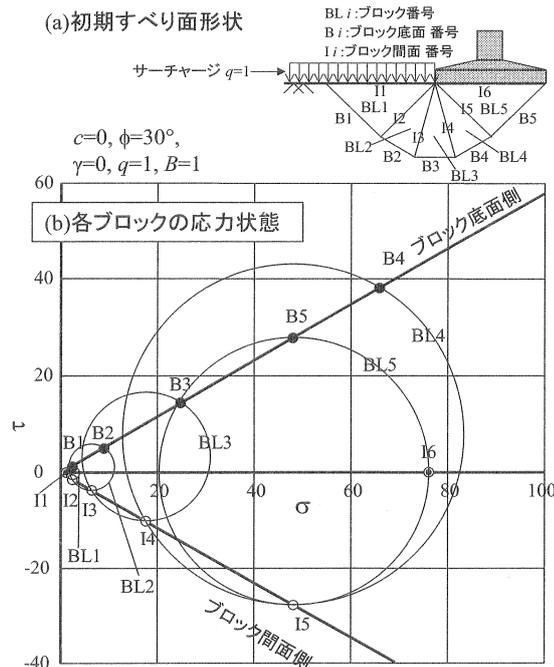


図-10 GLEMにおける各ブロックの応力状態(最適化前)

基礎の極限支持力  $H_{n+1}$  を求める場合にも、安全率  $F_s$  を求める問題の場合にも、これらを最小化するブロック群の幾何形状を探すことにより、極限平衡法を用いて解 (極限支持力または安全率と対応したブロック群の幾何形状すなわちすべり面形状) を求めることになる。すなわち、合計  $4n$  個のつりあい式と破壊条件式を満足させた上で、極限支持力  $H_{n+1}$  または安全率  $F_s$  を最小化するという、等号制約条件付き最適化問題を解けばよい。

等号制約条件付き最適化問題の解法は数学的には決して難しいものではないが、実用的なプログラムを作るのは簡単ではない。ところが、Microsoft社の表計算ソフトウェア Excel には、ソルバーという機能があり、限界はあるもののこの問題を簡単に解くことができる。

なお、GLEMを解くために著者の作成したExcelファイルを下記のWEBからダウンロードできる。

<http://www.denkishoin.co.jp/index.html>

図-6に示した  $N_q$  問題に対する GLEM 解はこのようにして求めたものである。

## 5. 極限平衡法における最適化の意味

### 5.1 GLEMにおける最適化の意味

GLEMにおいてすべり面を変えて極限支持力や安全率を最小化する過程は、クーロンの土圧解法、あるいはスライス法と全く同じ過程である。ここでは、最適化が必要である理由について考えてみる。

まず、支持力についての  $N_q$  問題 ( $c=0, \phi=30^\circ, \gamma=0, q=1, B=1$ ) を GLEM で解いた時の、各ブロックの応力状態を、図-10、図-11に示す。図-10では、初期すべり面形状を(a)に、それに対応した各三角形ブロック

(a)最適化後のすべり面形状

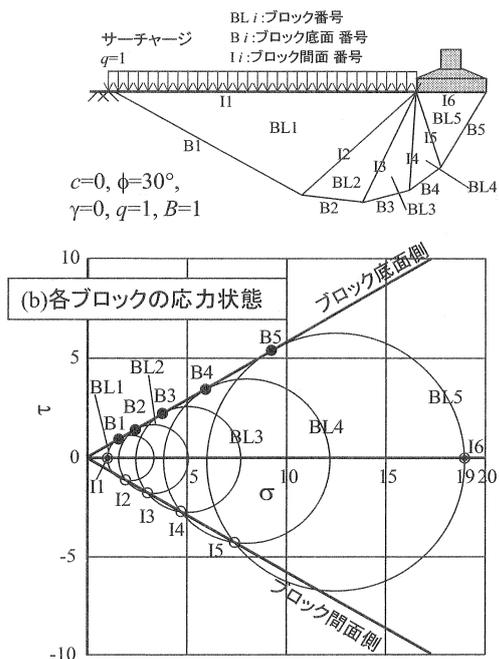


図-11 GLEMにおける各ブロックの応力状態(最適化後)

の応力状態を(b)に示す。図-11では、支持力を最小化して得られたすべり面形状を(a)に、それに対応した各三角形ブロックの応力状態を(b)に示す。なお、ここでは、自重のない三角形ブロックのつりあい応力状態がモール円 で表わされること、モーメントのつりあいはその円の中心が $\sigma$ 軸上にあることを用いている<sup>1)</sup>。

最適化前のモール円群は、①破壊規準線から逸脱している、②円の中心が $\sigma$ 軸上にない。②の意味は、そのブロックではモーメントのつりあいが満たされていないことを示す。それに対して、最適化後のモール円群は、①ブロック底面側ではほぼ完全に、ブロック間面側でも、離散化にとまらぬ僅かな誤差を除くと、破壊規準線から逸脱していない、②中心がほぼ $\sigma$ 軸上にある。

すなわち、GLEMでは、各ブロックにつりあい条件を適用するので、各ブロックの辺上の応力は必ず一つのモール円上にある。そして、すべり面上で破壊条件を適用するので、各ブロックのすべり面上の応力状態は必ず破壊基準線上の乗っている。この性質は、図-10(b)あるいは図-11(b)のように、最適化前後で同じである。

しかし、このままではモール円が破壊規準線を逸脱することは防げない。モール円群の左端が固定されている極限支持力問題では、ブロックの形状を変化させてモール円群の右端(極限支持力)を最小化すれば、モール円が破壊規準線と交点を持ったまま、上下の2本の破壊規準線に対してできるだけ逸脱しないようになる。そして、自動的にモール円の中心が $\sigma$ 軸上になり、モーメントのつりあいが満たされる。これが、GLEMで行っている最適化の物理的意味である。モール円群の右端が決まっている主動土圧問題では、最大化が必要なことも当然である。

安全率を求める問題における最適化についても、同様のモールの応力円を用いた物理的意味づけができる<sup>1)</sup>。

土の自重を考慮する場合には、つりあい条件がモールの応力円で表現できなくなるので、図-10、図-11のようなモールの応力円を用いての説明ができなくなるが、最適化の物理的な意味は同じであると類推できる。

### 5.2 クーロンの受動土圧解法における最適化

前節にならって、図-1に示した受動土圧問題で、自重 $\gamma$ がなくサーチャージ $q$ のみのある単位高さの直立擁壁の最小化の意味を考えると、図-12の通りである。すな

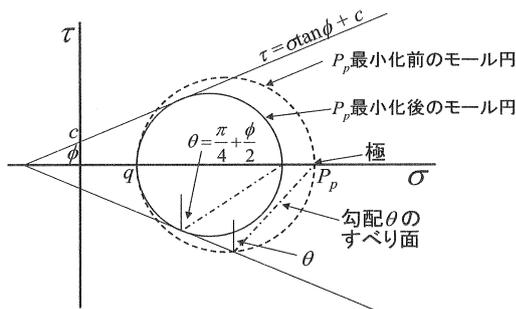


図-12 クーロンの方法における受動土圧最小化の意

わち、最小化前の三角形ブロックの応力状態は、破線で示したように、直径の左端と右端を $(\sigma=q, \tau=0)$ と $(P_p, 0)$ とするモール円である。任意の勾配のすべり面上で破壊条件を適用しているから、この円は破壊規準線と必ず交点を持つ。しかし、破壊規準線を逸脱している。ところが、直径の左端を $(q, 0)$ に固定したまま、右端 $(P_p, 0)$ を左に移動すると、実線で示した破壊規準線に接するモール円が得られる。これ以下に $P_p$ を低下させると破壊規準線との交点が無くなり、破壊条件を満足できなくなる。この場合には、裏込め地表が水平で、滑らかな鉛直壁面を考えているから、裏込め地表面と壁面上の応力が主応力となるため、モール円の中心は必ず $\sigma$ 軸上になり、三角形ブロックのモーメントのつりあいが満たされている。主動土圧はモール円の右端が固定されて、モール円の左端 $P_q$ を変化させる問題であるから、 $P_q$ を最大化する必要があることは明らかである。

### 5.3 スライス法における最適化

一般のスライス法ではスライス底面のみで破壊条件を用いているから、図-11で示した上側の破壊規準線しか考えていない。また、図-12で示したサーチャージの載荷面あるいは滑らかな鉛直壁面のように特定の主応力面を考えている訳でもない。このため、最適化の過程でスライス間面での応力状態が破壊状態にあるかどうかは不明であり、各スライスのモーメントのつりあいが満たされているかどうか(モール円の中心が $\sigma$ 軸上にあるか)も不明である。

## 6. 極限平衡法の位置付けとスライス法の意味

### 6.1 GLEMと極限平衡法の関係

すべり線法の二次元空間での基礎式は次の通りである。

まず、微小要素に対するつりあい式は、図-13より、以下の通りである。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \gamma = 0 \tag{16}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \tag{17}$$

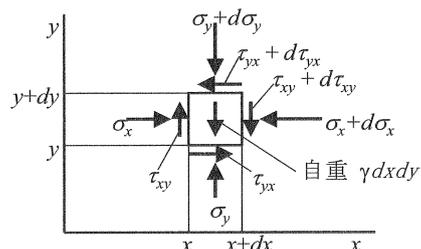


図-13 微小要素における力のつりあい

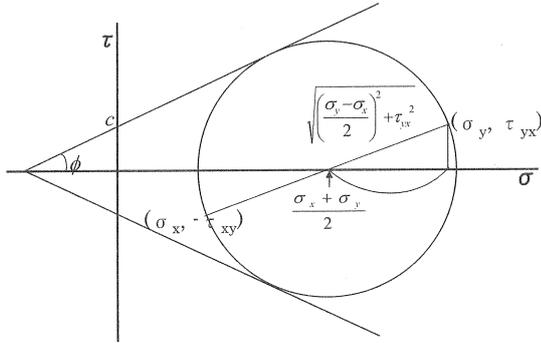


図-14 破壊条件式

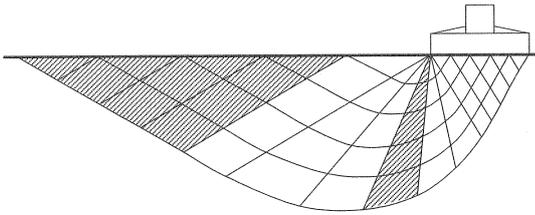


図-15 すべり線法の解と GLEM の解の関係

破壊条件式は、図-14 より、その点での応力状態を表わすモール円が破壊線に接するという式で、以下の通りである。

$$\left( c \cot \phi + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) \sin \phi = \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (18)$$

これに対して、GLEM の基礎式は式(11)～(14)に示した通りである。すべり線法における式(15)、(16)を微小要素でなくある面積に対して積分して示したのが式(11)、(12)であり、式(18)に対応するのが式(13)、(14)であること、微小要素のモーメントのつりあいを表わす式(17)は GLEM では最適化の過程で満足されることを考えると、GLEM はすべり線法の必要条件としての近似法であると結論付けられる。「必要条件」の意味は、ブロックに関しての積分形になっていることである。逆に、図-15 に示したすべり線法の解であるすべり線網からハッチしたブロックを切り出すと、GLEM の基礎方程式はすべて満たされることから、このことは明らかである。なお、GLEM は直線で囲まれたブロックを用いているので、すべり線解のすべり線が曲線になる部分を完全に近似することはできないのは当然である。

従来の極限平衡法の基礎式も、クーロンの土圧解法について式(1)～(3)に示した通り、つりあい式と破壊条件式を用いていることから、極限平衡法はすべり線法の近似解を求めようとしていたと想像できる。

## 6.2 スライス法におけるスライス間面力仮定

スライス法においても、スライス間面での力の仮定が妥当であれば、すべり線法の近似解を与えることが可能かもしれない。

多くのスライス法では、鉛直のスライス間面に作用するスライス間面力に関して、特定の関係を仮定する。例

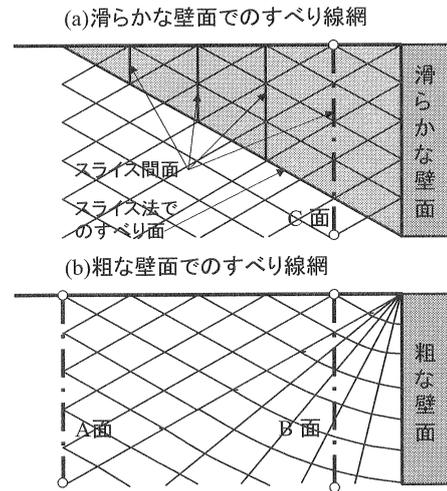


図-16 スライス間面力仮定の問題依存性

えば、簡易 Janbu 法や Bishop 法では、スライス間面でのせん断力  $T$  について、すべてのスライス間面で  $T=0$  を仮定する。このような仮定が一般的な問題に対して妥当であるかどうかは、受動土圧問題についてのすべり線場における鉛直面の応力状態を示した図-16 を見れば明らかである。

滑らかな壁面に対するすべり線場(a)において、鉛直面は全て主応力面であるから、土塊をスライス分割してスライス間面である鉛直面を考えるなら、この面上でせん断力  $T=0$  を仮定することは正しい。しかし、粗い壁面に対するすべり線場(b)においては、壁面近傍の過渡領域では鉛直面は主応力面でないから、スライス間面である鉛直面上でせん断力  $T=0$  を仮定することは正しくない。

すなわち、スライス間面である鉛直面においてすべり線法の解に対応した正しいスライス間面力仮定を行おうとするなら、問題依存の仮定を行う必要があり、壁面の滑・粗に関係しないいつでも妥当な仮定は存在しない。

## 6.3 スライス法の位置付け

すべり線法の近似法としてスライス法を位置付けようとする、前節で述べたように、スライス法は制約条件が多過ぎる。すなわち、スライス間面を鉛直に制約した上で、さらにその上での垂直力とせん断力の関係まで制約している。この点は、GLEM ではブロック間面上で垂直力とせん断力の関係を破壊条件を満たすように制約しているけれど、ブロック間面の角度は制約しなかったのですべり線法の近似解を得ることができたのと対照的である。

また、スライス法では、仮にスライス間面力仮定が妥当であったとしても破壊条件を仮定しない限りは、スライスのモーメントのつりあいが満たされていない可能性が高い。これは GLEM 解における各ブロックのモーメントのつりあいが、図-11 に示すように、ブロック底面とブロック間面両方で破壊条件を適用することにより満たされたことから推定できる。

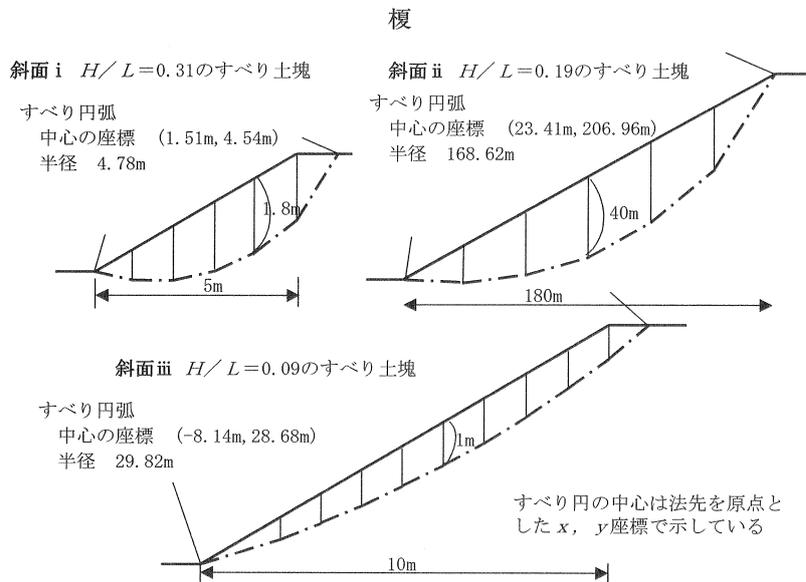


図-17 すべり土塊の  $H/L$  と各種の安定解析法による安全率の値の関係

では、スライス法の意味は何だったのか。

表-3 は、無限斜面としての安全率が 1 となる斜面で、図-17 に示す形状のすべり土塊を、各種の方法を用いて安定解析した結果である。ただし、すべり面の形状を変えた最適化はしていない。ここで、すべり土塊の厚さ(すべり面の最大深さ)を  $H$ 、すべり土塊の長さを  $L$  とすると、すべり土塊の  $H/L$  の低下とともに、「解析法による安全率の差がなくなり、無限斜面としての安全率に近づく」ことが明らかである。この理由は、どのようなスライス間力の仮定をしていても、すべり土塊が薄く長くなるにしたがい、どのスライスでも左右のスライス間力が等しくなるため、仮定の影響が消えて、最後には左右の側面力を等しいと仮定する無限斜面としての安全率になるためである。これは、スライス法が無限斜面に近いような斜面の安定解析にはそこそこの適用性があったことを示している。もっとも、そのような斜面には、無限斜面の安定解析法を用いる方が簡明であるが、

表-3 すべり土塊の  $H/L$  と各種の安定解析法による安全率の値の関係

斜面の種類		解析法				
番号	$H/L$	簡便分割法	Spencer 法	簡易 Bishop 法	簡易 Janbu 法	GLEM
斜面 i	$> 0.3$	1.302	1.501	1.505	1.322	1.504
斜面 ii	$\approx 0.2$	1.116	1.246	1.250	1.134	1.248
斜面 iii	$< 0.1$	1.059	1.072	1.072	1.059	1.074

## 7. おわりに

紙数の制限で説明不足の事項があると思う。特に、極限平衡法と上界法の関係については、全く触れることができなかった。これらについては参考文献 1) を参照していただきたい。

斜面安定の解析に対しては、解が式の形で得られ、斜

面の不安定化の原因が式の上で明解な無限斜面の安定解析法をもっと利用すべきであると考え。

70 年以上続いてきたスライス法の妥当性に関する議論に終止符を打つことができれば幸いである。

## 参考文献

- 1) 榎 明潔: 摩擦体としての土の安定と変形の解析法, 電気書院, 2007.
- 2) 右城 猛: 続・擁壁の設計法と計算例, 理工図書, p. 1, 1998.
- 3) Fellenius, W.: Calculation of the Stability of Earth Dams, Proc., the 2nd Congress on Large Dams, 445-462, 1936.
- 4) Bishop, A. W.: The Use of the Slip Line Circle in the Stability Analysis of Slopes, Géotechnique, Vol.5, No.1, pp.7-17, 1955.
- 5) Janbu, N.: Earth Pressure and Bearing Capacity Calculation by Generalized Procedure of Slices, Proc., the 4th ICSMFE, Vol.2, pp.207-212, 1957.
- 6) Spencer, E.: A Method of Analysis of Stability of Embankments Assuming Parallel Inter-slice forces, Géotechnique, Vol.17, No.1, pp.11-26, 1967.
- 7) Morgenstern, N. R. and Price, V. E.: The Analysis of Stability of General Slip Surface, Géotechnique, 15, pp.79-93, 1965.
- 8) ソコロフスキー (星埜・佐藤訳): 土のような粒状体の力学, オーム社, 52 頁, 1964.
- 9) Hansen, J. B.: Comparison of Methods for Stability Analysis, Bulletin No.21, Danish Geotechnical Institute, 1966.
- 10) Enoki, M., Yagi, N., Yatabe, R. and Ichimoto, E.: Generalized Slice Method for Slope Stability Analysis, Soils and Foundations, Vol. 30, No. 2, pp. 1-13, 1990.
- 11) Enoki, M., Yagi, N., Yatabe, R. and Ichimoto, E.: Generalized Limit Equilibrium Method and Its Relation to Slip Line Method, Soils and Foundations, Vol. 31, No. 2, pp. 1-13, 1991.
- 12) Enoki, M., Yagi, N., Yatabe, R. and Ichimoto, E.: Relation of Limit Equilibrium Method to Limit Analysis Method, Soils and Foundations, Vol. 31, No. 4, pp. 37-47, 1991.
- 13) Enoki, M. and Luong, Binh Xuan: Dynamic Theory of Rigid-Plasticity, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Elsevier, Rotterdam, pp. 635-647, 2005.