

Application of Consolidation Stress to Irrotational Consolidation

熊本直樹* (Naoki Kumamoto)

吉国洋** (Hiroshi Yoshikuni)

キーワード：圧密／間隙水圧／応力／粘土 (I G C : D 5)

1. まえがき

圧密現象は、粘土骨格の変形と間隙流体の移動とが複合した問題であるので、単純な変形問題と異って、時間に依存した複雑な現象である。一次元の圧密現象については、Terzaghi が最初に理論的に取扱い、土質工学の道を進む者に大きな影響を与えた。Terzaghiが取扱った圧密現象は、変形・排水ともに一次元で、粘土骨格の等方線形性など、多くの仮定に基づいたものであるが、いまだに多くの人の意識を占有している。すなわち、彼の一次元圧密の概念は、一次元圧密に限れば正しいが、その影響が大であったために、一般の圧密に共通の概念と誤まって認識されることが多く、土の構成則や高度な数値計算を駆使する人達でさえも、圧密に関しては初歩的な一次元圧密の概念で全ての圧密現象を考えてしまうことがある。

一方、Biot は、三次元弾性論の立場から、一組の圧密支配方程式を提案した。これがいわゆるBiotの方程式で、理論的には正しく、現在では数値解析などに広く用いられている。しかし、一般の圧密になると、数学的に取扱いが困難になり、方程式も連立偏微分方程式となるため、多次元圧密の概念がつかみ難いことが難点である。このような難点に対して、吉国¹⁾や田村²⁾はBiotの圧密理論から出発して、圧密の方程式をひとつの式で表わし、圧密の物理的意味を理解しやすくした。この論文では、圧密応力 ϕ を中心にした吉国の理論を用いて、非回転の圧密について論じる。

非回転の圧密とは、粘土の変位の回転がゼロ ($\text{rot } \mathbf{u} = 0$, \mathbf{u} : 変位ベクトル) の圧密で、限定された変形条件ではあるが、多次元圧密の特徴を多く含有している。この非回転圧密は、圧密応力を中心にした吉国の理論を用いれば、解析的に厳密解が得られることを既に述べ³⁾、その応用例として円柱の圧密³⁾、中空円柱の圧密⁴⁾の解も示している。ここではさらに立方体の圧密、球の圧密への応用例を示し、圧密現象について考える。球の圧密は既にCryerによってここで述べるものとは別の方法で解かれているが、吉国理論応用の一例として取り上げた。また、立方体の圧密は、問題が単純で、しかも条件によってはTerzaghiの一次元圧密と全く同じ問題も取扱うので、一次元圧密と多次元圧密の違いの説明に最適の材料である。

2. 非回転圧密の解法

既に、文献³⁾に非回転圧密の解法については説明しているので、ここではその骨子を簡単に述べる。なお、この論文では、1) 土塊の等方、均質性、2) 完全飽和、3) 土粒子及び間隙水の非圧縮性、4) 線形の応力-ひずみ関係、5) 微小ひずみ、6) Darcy 則の成立、7) 透水係数一定の仮定を置く。

圧密応力 ϕ は

$$\phi = (\lambda + 2\mu) e_v + \mathbf{u} = \frac{1}{m_v} e_v + \mathbf{u} \quad (1)$$

ここに、 λ , μ : ラメの定数

e_v : 体積ひずみ

* 三菱重工業 (株) 広島研究所 土木研究室

** 工博, 広島大学工学部 第IV類 教授

u : 間隙水圧 m_v : 体積圧縮係数

で定義される。非回転圧密の場合には、 $\text{grad } \phi = 0$ となり、圧密応力 ϕ は位置的には定数で時間のみの関数である。したがって、非回転の圧密は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u + \frac{d\phi}{dt} \quad (2)$$

ここに t : 時間 C_v : 圧密係数

で表わされる。一方、非回転圧密の場合には、変形に関する境界条件から、圧密応力 ϕ が

$$\phi = (1 + \alpha) p - \alpha \bar{u} \quad (3)$$

という形で表わすことができる。ここで、 p は圧密荷重、 α は土塊の形状、変形条件及びポアソン比から決定される定数である。また、 \bar{u} は位置の平均を意味する。(3)式を(2)式に代入し、かつ圧密荷重 p が時間的に一定とすると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u - \alpha \frac{1}{V} \cdot \frac{d}{dt} \int_V u dV \quad (4)$$

を得る。(4)式が非回転の圧密の圧密方程式で、未知数は間隙水圧 u のみである。(3)式を求める段階で変形に関する境界条件は考慮されているので、(4)式は間隙水圧 u の境界条件及び初期条件を用いて解けば良い。(4)式のままでは、数学的取扱いが困難であるが、

$$w = u + \alpha \bar{u} = u + \frac{\alpha}{V} \int_V u dV \quad (5)$$

ここに V : 土塊の体積

と置くと、(4)式は

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c_v \nabla^2 w \quad (6)$$

と熱伝導型の圧密方程式になり、しかも、 w の境界条件は

$$\text{排水面において} \quad w = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \cdot \frac{1}{V} \int_V w dV \quad (7)$$

$$\text{非排水面において} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (8)$$

と与えられ、 $t = 0$ で u が一様に分布しているとすれば、 w の初期値 w_0

$$w_0 = u_0 + \alpha \bar{u}_0 = (1 + \alpha) u_0 \quad (9)$$

となり、解を求めることができる。ここで、 u_0 は u の初期値である。

3. 立方体の圧密

3. 1 仮定

図1に示すように、一辺の長さが L の立方体を考える。問題を簡単にするために、排水方向は z 方向のみとし、 $z = 0$ の面を排水面、 $z = L$ の面を非排水面とする。また、 $x = 0$ の面、 $y = 0$ の面、 $z = L$ の面は不変とし、 $x = L$ の面の変位量を u_{xL} 、 $y = L$ の面の変位量を u_{yL} 、 $z = 0$ の面の変位量を u_{z0} とする。さらに、非回転圧密という条件を満足するために、次の仮定を置く。

(ア) 各境界面は、元の境界面に平行を保って変位する。

(イ) 各境界面は、滑らかである。

非回転圧密への圧密応力の適用

3. 2 圧密応力 ϕ

各境界面での応力の釣合, 応力・ひずみ関係式, 変位・ひずみ関係式, 及び圧密応力 ϕ の定義から, 次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= p_z + 2\mu \left(\frac{u_{xL}}{L} + \frac{u_{yL}}{L} \right) \\ \phi &= \bar{p}_x + 2\mu \left(\frac{u_{yL}}{L} + \frac{u_{z0}}{L} \right) \\ \phi &= \bar{p}_y + 2\mu \left(\frac{u_{z0}}{L} + \frac{u_{xL}}{L} \right) \\ \phi &= \bar{\phi} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{L} (u_{xL} + u_{yL} + u_{z0}) + \bar{u} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで, p_x, p_y, p_z はそれぞれ, x 方向, y 方向, z 方向の圧密荷重で, x 方向及び y 方向は圧密過程に分布形を成すので平均値で与える。境界値は, 変位に関するもの 3 個, 応力に関するもの 3 個の計 6 個であるが, この内 3 個に境界値を与えれば, 未知数は残りの 3 個の境界値と圧密応力 ϕ の 4 個になる, 一方, (10) 式に示すように, 未知数 4 に対して式が 4 つであるので, (10) 式から未知境界値及び圧密応力が定まる。既知境界値

と未知境界値の組合せの内, ここでは表 1 に示す 3 ケースを取り上げる。ケース 1 は, いわゆる等方圧密である。ケース 3 は, Terzaghi が取扱った次元圧密である。ケース 2 は, z 方向の変位を拘束して, x 方向及び y 方向から圧密荷重をかけたものである。これらの圧密応力 ϕ を (10) 式から求めると,

$$\phi = (1 + \alpha) p - \alpha \bar{u} \quad (11)$$

$$\text{ここに } p = F_z p_z + F_x \bar{p}_x + F_y \bar{p}_y \quad (12)$$

となる。 α, F_z, F_x, F_y は表 1 に示す値である。未知境界値も (10) 式から求まるが, 紙面の都合で省略する。Terzaghi が取扱った次元圧密 (ケース 3) の圧密応力は, $\phi = p$ という特殊なケースであることが分る。図 2 に, 表 1 に示す 3 ケースのポアソン比 ν と α の関係を示す。

3. 3 圧密方程式とその解

定荷重下の立方体の圧密方程式は, (11) 式を (2) 式に代入して $\dot{p} = 0$ と置くと,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\alpha}{L} \frac{d}{dt} \int_0^L u \, dz \quad (13)$$

となる。これを,

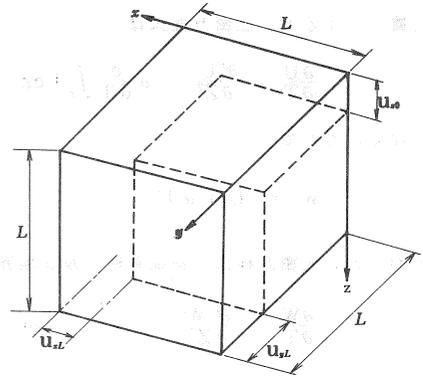
$$u(z, 0) = p \quad (14)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad (16)$$

という初期条件及び境界条件のもとに解く。無次元化した解を得るために,

$$U = \frac{u}{p} = \frac{u}{u_0}, \quad Z = \frac{z}{L}, \quad T = \frac{c_v t}{L^2} \quad (17)$$



(上端面のみ排水面)

図 1. 立方体の座標

表 1 立方体の圧密の圧密応力 ϕ の係数 α と F_z, F_x, F_y : ポアソン比

case No.	既知境界値	未知境界値	α	F_z	F_x	F_y
1	$p_z = \bar{p}_x = \bar{p}_y$	$u_{xL} = u_{yL} = u_{z0}$	$2(1-2\nu)/(1+\nu)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	$\bar{p}_x = \bar{p}_y, u_{z0} = 0$	$u_{xL} = u_{yL}, p_z$	$1-2\nu$	0	0.5	0.5
3	$p_z, u_{xL} = u_{yL} = 0$	$u_{z0}, \bar{p}_x = \bar{p}_y$	0	1	0	0

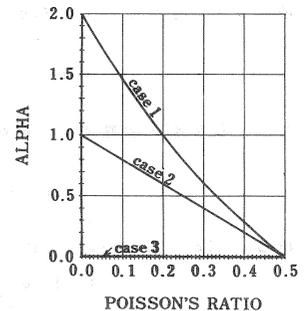


図 2. ポアソン比 ν と α の関係

と置く。すると、圧密方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} - \alpha \frac{d}{dT} \int_0^1 U dz \quad (18)$$

となる。ここで

$$W = U + \alpha \bar{U} \quad (19)$$

とおくと、圧密方程式、初期条件、及び境界条件は次のようになる。

$$W(Z, 0) = 1 + \alpha \quad (20)$$

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \quad (21)$$

$$W(0, T) = \alpha \bar{U} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \int_0^1 W dz \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial Z} \right|_{Z=1} = 0 \quad (23)$$

Wを時間関数 τ と位置関数 z に変数分離して(20)式に代入し、その解を求め、境界条件(23)式を用いると

$$W = C \left(\frac{\cos \lambda}{\sin \lambda} \cos \lambda Z + \sin \lambda Z \right) e^{-\lambda^2 T} \quad (24)$$

を得る。また、境界条件(22)式を考慮すると、

$$(1+\alpha) \lambda \cos \lambda - \alpha \sin \lambda = 0 \quad (25)$$

を得る。したがって、 λ として(25)式の根をとれば、境界条件は満足される。

次に初期条件(21)式を考慮するために、級数を構成して

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} C_i D(\lambda_i Z) e^{-\lambda_i^2 T} \quad (26)$$

$$\text{ここに } D(\lambda_i Z) = \frac{\cos \lambda_i}{\sin \lambda_i} \cdot \cos \lambda_i Z + \sin \lambda_i Z$$

と置く。このとき、境界条件(25)式の下では $E(\lambda_i Z) = \frac{\cos \lambda_i}{\sin \lambda_i} \sin \lambda_i Z - \cos \lambda_i Z$ が区間(0, 1)において重み関数 $f(Z)=1$ に関して直交系を形成しているので、この性質を利用して係数 c_i を定める(紙面の都合で直交性の証明は省略する)。間隙水圧が $t=0$ で一様に分布しているときは、 $W(Z, 0) = 1 + \alpha$ ((21)式)であれば $t=0$ における $W(Z, 0)$ の $Z = Z (0 \leq Z < 1)$ から $Z = 1$ までの平均値は常に $1 + \alpha$ であり、またその逆も成立する。したがって、(26)式で $T=0$ と置いて初期条件を考慮すると、

$$1 + \alpha = \frac{1}{1-Z} \int_Z^1 \sum_{i=1}^{\infty} C_i D(\lambda_i Z) dz \quad (27)$$

となり、具体的に演算すると最終的に

$$(1 + \alpha)(Z - 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_i}{\lambda_i} E(\lambda_i Z) \quad (28)$$

を得る。(28)式の両辺に $E(\lambda_j Z)$ をかけて(0, 1)間で積分し、関数 E の直交性を用いると

$$C_i = \frac{\lambda_i (1 + \alpha) \int_0^1 E(\lambda_i Z) (Z - 1) dz}{\int_0^1 |E(\lambda_i Z)|^2 dz} \quad (29)$$

と係数 C_i が定まる。以上で W が求まったが間隙水圧 U は

$$U = W - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \int_0^1 W dz = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \left[\frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha} (\cos \lambda_i Z - 1) + \sin \lambda_i Z \right] e^{-\lambda_i^2 T} \quad (30)$$

と求まる。また平均間隙水圧 \bar{U} は

$$\bar{U} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \frac{1}{\lambda_i} \left[\frac{1}{\lambda_i} \frac{\alpha}{1 + \alpha} (\sin \lambda - \lambda) - \cos \lambda + 1 \right] e^{-\lambda_i^2 T} \quad (31)$$

非回転圧密への圧密応力の適用

と求まる。なお、係数 C_i (29) 式) は具体的に積分すると、

$$C_i = \frac{\frac{\alpha}{\lambda_i} (\sin \lambda_i - \lambda_i \cos \lambda_i) - \cos \lambda_i + 1}{\left\{ 1 - \frac{\alpha^2}{\lambda_i^2 (1 + \alpha^2)} \right\} \frac{1}{4} \sin 2\lambda_i - \sin \lambda_i \cos \lambda_i + \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{\lambda_i^2 (1 + \alpha^2)} \right\} \frac{\lambda_i}{2}} \quad (32)$$

となる。

計算例を、図3～図6に示す。図3は、 α をパラメータにして、平均圧密度と時間係数 T の関係を示したものである。 $\alpha = 0.0$ の曲線がいわゆるTerzaghiの解である。 α が大きくなると、圧密速度が遅くなる。図4は、 $\alpha = 0.0$ すなわち、Terzaghiが解いた問題と同じ条件のときの、圧密応力 ϕ と粘土内部の間隙水圧を示したものである。この場合には、圧密応力は圧密過程を通じて一定で、間隙水圧は排水面に近い位置から徐々に減少する。これが教科書等でよく説明されているバネと細孔のあいたピストンから成るTerzaghiの圧密の概念で、载荷に伴って発生した間隙水圧が、細孔から排出されるに従って圧密が進行し、沈下も発生する。

ところが図5に示すように、 $\alpha \neq 0$ の場合の圧密は、単なる拡散現象とは異なる。図5は α が0.5のときの圧密応力と粘土内部の間隙水圧を示したもので、これは、ポアソン比 $1/3$ の粘土の立方体を等方的に圧密した状態(ケース1)に相当する。図5では、粘土の変形に伴って間隙水圧が初期値から増大し、圧密が単なる初期間隙水圧の拡散現象ではなく、変形と間隙水の挙動が互に関係しあっていることが、知れる。Terzaghiが取扱った一次元圧密(ケース3)は、たまたま $\alpha = 0.0$ の最も単純な圧密形式だったのである。このとき、圧密応力 ϕ は漸増しており、それが間隙水圧、最終的には体積ひずみに転換する。このような定荷重のもとでの圧密応力の漸変が、多次元圧密の根本的特徴である。

なお、圧密応力 ϕ が増加すると、体積ひずみがまだ十分発生していないときに、間隙水圧が初期値よりも大きくなる。この現象をMandel-Cryer効果という。図6に非排水面の間隙水圧の挙動を示したが、 α が大きくなると圧密応力 ϕ の増加割合も大きくなり(11)式参照)、Mandel-Cryer効果も顕著になる。

以上で述べたように、同じ立方体の粘土で排水条件が同一でも、変形条件によって圧密速度、間隙水圧、など圧密挙動が変化する。

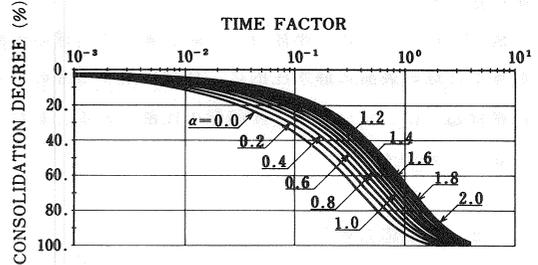


図3. 平均間隙水圧(立方体)

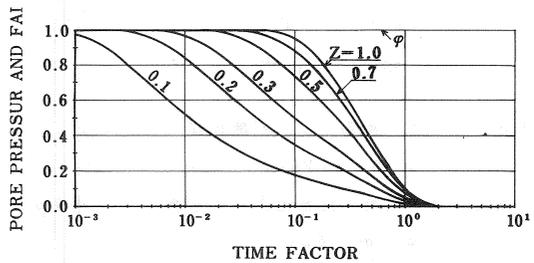


図4. $\alpha = 0.0$ のときの間隙水圧と圧密応力

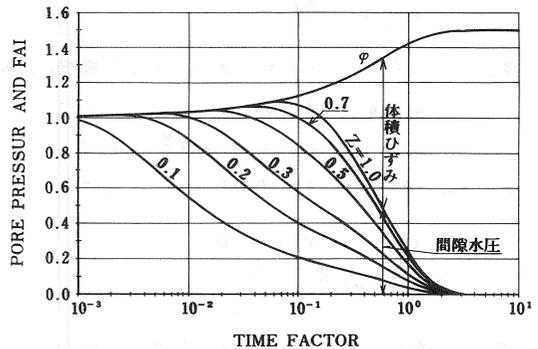


図5. $\alpha = 0.5$ のときの間隙水圧と圧密応力

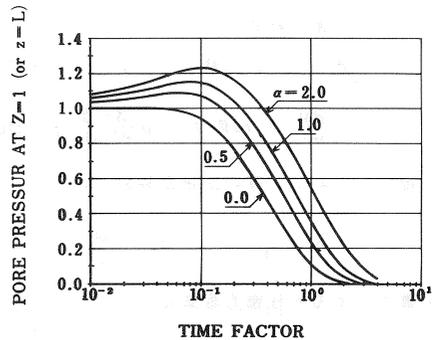


図6. $Z = 1$ の間隙水圧(立方体)

4. 球の圧密

4. 1 仮定

球の圧密は、既に Cryer⁵⁾ が Laplace 変換を用いて解いているが、ここでは、圧密応力 ϕ を中心とした吉国理論の応用例として、その解を簡単に述べる。

図 7 に示すように、半径 r_0 の球を考える。球の表面を排水面とし、荷重 p は球の表面に静水圧的に一様に作用するものとする。このような圧密は $\omega = 0$ 、すなわち、非回転の圧密である。また、球の表面の変位を u_{r_0} で表わす。

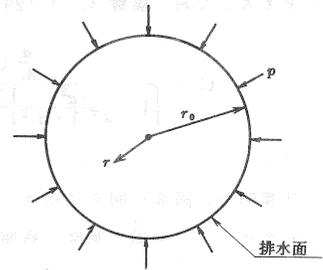


図 7. 球の圧密

4. 2 圧密応力 ϕ

球の表面では

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r |_{r=r_0} &= p \\ \epsilon_\theta |_{r=r_0} &= -\frac{1}{r_0} u_{r_0} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

である。一方、応力-ひずみ関係は

$$\sigma_r' = (\lambda + 2\mu) \epsilon_v - 4\mu \epsilon_\theta \quad (34)$$

であるので、これに圧密応力 ϕ の定義 (1) 式を持ち込むと

$$\phi = \sigma_r + 4\mu \epsilon_\theta \quad (35)$$

となる。従って、(33)、(35) 式から球表面の圧密応力 ϕ は

$$\phi = p - \frac{4\mu}{r_0} u_{r_0} \quad (36)$$

と書ける。ところが、非回転圧密では ϕ は位置的に定数であるので

$$\begin{aligned} \phi = \bar{\phi} &= (\lambda + 2\mu) \bar{\epsilon}_v + \bar{u} \\ &= -3(\lambda + 2\mu) \frac{u_{r_0}}{r_0} + \bar{u} \end{aligned} \quad (37)$$

と書ける。(36) 式と (37) 式から u_{r_0} を消去すると

$$\phi = (1 + \alpha) p - \alpha \bar{u} \quad (38)$$

$$\text{ここに } \alpha = \frac{2(1-2\nu)}{1+\nu} \quad (39)$$

を得る。圧密応力 ϕ の形は立方体の圧密のそれと全く同じ形で、 α は立方体の等方圧密と同じになる。

4. 3 圧密方程式とその解

(38) 式を (2) 式に代入し、 $\dot{p} = 0$ とすると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u - \alpha \frac{3}{r_0^3} \frac{d}{dt} \int_0^{r_0} r^2 u dr \quad (40)$$

を得る。これが、球の圧密方程式である。この解を以下に示すが、無次元化した解を得るために、

$$R = \frac{r}{r_0}, \quad U = \frac{u}{p} = \frac{u}{u_0}, \quad T = \frac{c_v t}{r_0^2} \quad (41)$$

と置く。すると圧密方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \nabla^2 U - 3\alpha \frac{d}{dT} \int_0^1 R^2 U dR \quad (42)$$

非回転圧密への圧密応力の適用

となる。これを

$$\text{(境界条件)} \quad U(1, T) = 0 \quad (43) \quad \text{(初期条件)} \quad U(R, 0) = 1 \quad (44)$$

のもとに解く。まず

$$W = U + \alpha \bar{U} \quad (45)$$

と置くと、(42) 式は (43) ; (44) 式は

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \nabla^2 W \quad (46) \quad W(1, T) = \frac{3\alpha}{1+\alpha} \int_0^1 R^2 W dR, \quad W(R, 0) = 1 + \alpha$$

となる。W を時間の関数と位置の関数とに変数分離して (46) 式に代入して解を求め、さらに、 $R = 0$ で有限値を有することを考慮すると

$$W = B \frac{\sin \lambda R}{\lambda R} e^{-\lambda^2 T} \quad (47)$$

を得る。これに境界条件を考慮すると

$$\lambda = \left(1 - \frac{1+\alpha}{3} \lambda^2\right) \tan \lambda \quad (48)$$

を得る。したがって、 λ として (48) 式の根をとれば、境界条件は満足される。

次に、初期条件を考慮するために、級数を構成して W を

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \frac{\sin \lambda_i R}{\lambda_i R} e^{-\lambda_i^2 T} \quad (49)$$

と置く。初期条件を考慮すると

$$1 + \alpha = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \frac{\sin \lambda_i R}{\lambda_i R} \quad (50)$$

となる。一方、境界条件 (48) 式のもとでは、紙面の都合で証明は省略するが

$$\int_0^1 R^2 \frac{\sin \lambda_\ell R}{\lambda_\ell R} \left(\frac{\sin \lambda_k R}{\lambda_k R} - \frac{\sin \lambda_k}{\lambda_k} \right) dR = 0 \quad (k \neq \ell) \quad (51)$$

であるので、(50) 式の両辺に

$$R^2 \left(\frac{\sin \lambda_i R}{\lambda_i R} - \frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i} \right) \quad (52)$$

をかけて、0 から 1 の範囲で積分すると、最終的に係数 B_i は

$$B_i = \frac{(1+\alpha) \int_0^1 \left(\frac{\sin \lambda_i R}{\lambda_i R} - \frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i} \right) dR}{\int_0^1 R^2 \left(\frac{\sin \lambda_i R}{\lambda_i R} \right)^2 dR - \frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i} \int_0^1 R^2 \frac{\sin \lambda_i R}{\lambda_i R} dR} \quad (53)$$

を得る。以上で W が求まったので、W から間隙水圧 U を求めると、

$$U = W - \frac{3\alpha}{1+\alpha} \int_0^1 R^2 W dR = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \left(\frac{\sin \lambda_i R}{\lambda_i R} - \frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i} \right) e^{-\lambda_i^2 T} \quad (54)$$

となる。また、平均間隙水圧 \bar{U} は

$$\bar{U} = \frac{3}{1+\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cdot \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i^2} - \frac{\cos \lambda_i}{\lambda_i} \right) e^{-\lambda_i^2 T} \quad (55)$$

と求まる。なお、係数 B_i ((53) 式) は具体的に積分すると、(56) 式ようになる。また平均圧密度と時間係数の関係を図 8 に、 $\alpha = 0$ 及び $\alpha = 0.5$ ($\nu = \frac{1}{3}$ に相当) のときの間隙水圧を図 9、図 10 に、球の中心の間隙水

圧を図 11 に示す。

$$B_i = \frac{(1 + \alpha) \left(\frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i^3} - \frac{\cos \lambda_i}{\lambda_i^2} - \frac{\sin \lambda_i}{3\lambda_i} \right)}{-\frac{\sin \lambda_i \cos \lambda_i}{2\lambda_i^3} + \frac{1}{2\lambda_i^2} - \frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i^2} \left(\frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i^2} - \frac{\cos \lambda_i}{\lambda_i} \right)} \quad (56)$$

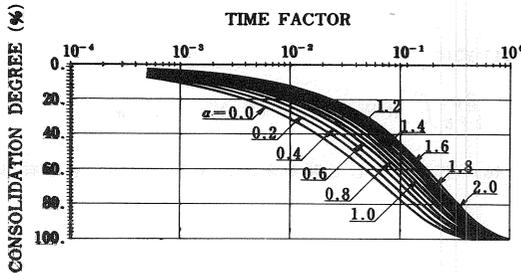


図 8. 平均圧密度と時間係数 (球の圧密)

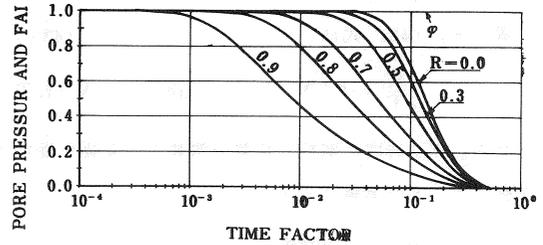


図 9. $\alpha = 0.0$ のときの間隙水圧と圧密応力

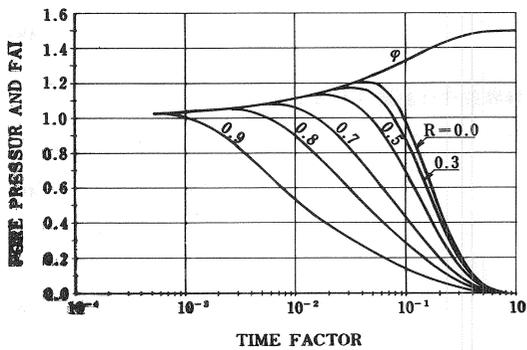


図 10. $\alpha = 0.5$ のときの間隙水圧と圧密応力

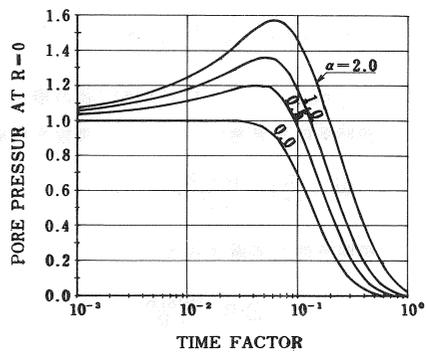


図 11. 球の中心の間隙水圧

5. 非回転圧密

本論文に示した立方体や球の圧密の他に、圧密応力 φ を用いて既に円柱の圧密³⁾、中空円柱の圧密⁴⁾の解も求めている。以上から分るように、非回転の圧密であれば、変形条件から圧密応力 φ を求めることができ、間隙水圧のみで表わされた圧密方程式を得、しかも、境界条件、初期条件も与えることができるので、解を求めることができる。これらを総合的に書くと、次のようになる。

非回転の圧密は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u + \frac{d\varphi}{dt} \quad (57)$$

で表わされる。 φ は圧密応力であるが、非回転圧密の場合には

$$\varphi = (1 + \alpha) p - \alpha \bar{u} \quad (58)$$

と表わされる。ここで、 α 、 p の例を示すと表 1 のようになる。したがって、 p が時間的に変化しない場合は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u - \alpha \frac{d\bar{u}}{dt} = c_v \nabla^2 u - \frac{\alpha}{V} \frac{d}{dt} \int_V u dV \quad (59)$$

という間隙水圧のみで表わされた圧密方程式を得る。(59) 式の無次元解は、一般に (60) 式のように書ける。

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \left[D_0(\lambda_i \zeta) - D_0(\lambda_i \zeta) \Big|_{\zeta=\zeta_0} \right] e^{-\lambda_i^2 \tau} \quad (60)$$

ここで、関数 D_0 、位置の変数 ζ 、 ζ_0 、固有値 λ_i 、及び τ は表 2 に示すとおりであり、係数 C_i は表 3 に示すとおり

非回転圧密への圧密応力の適用

である。圧密応力 φ は、 $t = 0$ のとき $\varphi_0 = u_0 = \bar{u}_0$ であり、 $t = \infty$ のときには $\varphi_1 = (1+\alpha)u_0$ であるので、

$$\alpha = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\varphi_0} \quad (61)$$

を得る。したがって、 α は圧密前後の圧密応力の増加率を意味するが、表1から分るように、立方体とか円柱という粘土の形状には無関係で、

等方的に圧密すると、 Z 方向の変位を拘束するなどの変形条件で決まる。このことから、圧密は単なる間隙水の消散現象ではなく、変形条件にも大きく左右されることが分る。

(60) 式にみられるように、間隙水圧の無次元量 U は関数 $D_0(\lambda_i \zeta)$ からその関数の ζ に ζ_p を代入したものを引いた形になっている。 ζ_p は具体的には排水面の位置を意味するが、 $D_0(\lambda_i \zeta)|_{\zeta=\zeta_p}$ は次のような形に書くこともできる。

$$(\text{立方体の圧密}) \frac{\alpha}{1+\alpha} \int_0^1 D_0(\lambda_i \zeta) d\zeta \quad (62)$$

$$(\text{球の圧密}) \frac{3\alpha}{1+\alpha} \int_0^1 \zeta^2 D_0(\lambda_i \zeta) d\zeta \quad (63)$$

$$(\text{円柱の圧密}) \frac{2\alpha}{1+\alpha} \int_0^1 \zeta D_0(\lambda_i \zeta) d\zeta \quad (64)$$

$$(\text{中空円柱の圧密}) \frac{2\alpha}{(1+\alpha)(n^2-1)} \int_1^n \zeta D_0(\lambda_i \zeta) d\zeta \quad (65)$$

したがって、一般的な非回転圧密では、粘土内のある1点の間隙水圧はその点のみ単独で決まるのではなく、土塊全体に渡って積分した値にも影響されている。そして、 α が0のときは(62)~(65)式から分るように、 $D_0(\lambda_i \zeta)|_{\zeta=\zeta_p}$ が0となり、間隙水圧は

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} C_i D_0(\lambda_i \zeta) e^{-\lambda_i^2 \tau} \quad (66)$$

という単純な形で表わされる。

次に、以上の解析で用いた $W = U + \alpha \bar{u}$ という関数 W について考える。 W を無次元化しない形で書くと

$$w = u + \alpha \bar{u} = u - \varphi + (1+\alpha)p = (1+\alpha)p - \frac{1}{m\nu} e\nu \quad (67)$$

となる。一方、圧密応力 φ の定義から、圧密の最終状態を考えると

表1. α , p の例

圧密形式	既知境界値及び p				α
	立方体	球	円柱	中空円柱	
等方圧密	$p_r = \bar{p}_r = \bar{p}_\theta = p$	p	$p_r = \bar{p}_r = p$	$p_{rr} = p_{\theta\theta} = \bar{p}_\theta = p$	$\frac{2(1-2\nu)}{1+\nu}$
K ₀ 圧密(p_r 既知型)	$p_r = p$ $u_{Lz} = 0, u_{Lr} = 0$	—	$p_r = p$ $u_{\theta\theta} = 0$	$p_r = p$ $u_{rr} = 0, u_{\theta\theta} = 0$	0
$\epsilon_r = 0$ 圧密	$\bar{p}_r = \bar{p}_\theta = p$ $u_{Lz} = 0$	—	$p_r = p$ $u_{\theta\theta} = 0$	$p_r = \frac{n^2-1}{n^2-1} p_{rr} + \frac{1}{n^2-1} p_{\theta\theta}$ $u_{Lz} = 0$	$1-2\nu$
中空押し広げ型圧密	—	—	—	$p_{rr} = p$ $u_{Lz} = 0, u_{Lr} = 0$	$\frac{(n^2-1)(1-2\nu)}{(1-2\nu)n^2+1}$

u_{Lz} : 円柱周囲の半径方向変位, $u_{Lr}, u_{L\theta}$: 中空円柱外面の半径方向変位, $n = r_c/r_w$

表2. $\zeta, D_0(\lambda_i \zeta), \zeta_p, \tau, \lambda_i$

	ζ		$D_0(\lambda_i \zeta)$	ζ_p	τ		λ_i
	ζ	定義			r	Tの定義	
立方体の圧密	Z	$\frac{Z}{L}$	$\frac{1}{\lambda_i} \frac{\alpha}{1+\alpha} \cos \lambda_i z + \sin \lambda_i z$	0	T	$\frac{Cvt}{L^2}$	$(1+\alpha)\lambda \cos \lambda - \alpha \sin \lambda = 0$ の根
球の圧密	R	$\frac{r}{r_0}$	$\frac{\sin \lambda_i R}{\lambda_i R}$	1	T	$\frac{Cvt}{r_0^2}$	$(1 - \frac{1+\alpha}{3}\lambda^2) \tan \lambda - \lambda = 0$ の根
円柱の圧密	R	$\frac{r}{r_0}$	$J_0(\lambda_i R)$	1	T	$\frac{Cvt}{r_0^2}$	$J_0(\lambda) - \frac{2\alpha}{1+\alpha} \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda) = 0$ の根
中空円柱の圧密	R	$\frac{r}{r_w}$	$J_0(\lambda R) - \frac{J_1(\lambda n)}{Y_1(\lambda n)} Y_0(\lambda R)$	1	$4n^2 T$	$\frac{Cvt}{d_w^2}$	$D_0(\lambda) + \frac{2\alpha}{(1+\alpha)(n^2-1)\lambda} D_1(\lambda) = 0$ の根

J, Y: Bessel関数 $n = r_c/r_w$ $d_w = 2r_c$ $D_1: D_0$ で J_0, Y_0 を J_1, Y_1 と置いたもの

表3. 係数 C_i

	C_i
立方体の圧密	$\frac{\alpha}{\lambda_i} (\sin \lambda_i - \lambda_i \cos \lambda_i) - \cos \lambda_i + 1$ $\left\{ 1 - \frac{\alpha^2}{\lambda_i^2 (1+\alpha)^2} \right\} \frac{1}{4} \sin 2\lambda_i - \sin \lambda_i \cos \lambda_i + \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{\lambda_i^2 (1+\alpha)^2} \right\} \frac{\lambda_i}{2}$
球の圧密	$(1+\alpha) \left(\frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i^2} - \frac{\cos \lambda_i}{\lambda_i} - \frac{\sin \lambda_i}{3\lambda_i} \right)$ $-\frac{\sin \lambda_i \cos \lambda_i}{2\lambda_i^2} + \frac{1}{2\lambda_i^2} - \frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i^2} \left(\frac{\sin \lambda_i}{\lambda_i^2} - \frac{\cos \lambda_i}{\lambda_i} \right)$
円柱の圧密	$\frac{2}{\lambda_i \left\{ 1 - \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \cdot \frac{1}{\lambda_i^2} \right\} J_1(\lambda_i)}$
中空円柱の圧密	$\frac{-2\lambda_i D_1(\lambda_i)}{\lambda_i^2 n^2 \{D_0(\lambda_i; n)\}^2 - \left[\lambda_i^2 - 1 + \left\{ \frac{2\alpha + (1+\alpha)(n^2-1)}{(1+\alpha)(n^2-1)} \right\}^2 \right] \{D_1(\lambda_i)\}^2}$

$$\phi = (1 + \alpha)p = \frac{1}{m_v} e_{vf} \quad (68)$$

である。したがって、(68) 式を (67) 式に代入すると、

$$w = \frac{1}{m_v} (e_{vf} - e_v) \quad (69)$$

となり、 w の物理的な意味は最終体積ひずみ e_{vf} からある時間の体積ひずみ e_v を引いたもので、 e_v と表裏一体をなす性質のものである。

試みに w で表わされた圧密方程式 ((6)式) に (69)式を代入すると、 $m_v e_{vf}$ は定数であるので

$$\frac{\partial e_v}{\partial t} = c_v \nabla^2 e_v \quad (70)$$

という体積ひずみで表わされた圧密方程式を得る。一般には体積ひずみで表わされた圧密方程式には境界条件を与えることができないので (70) 式は圧密方程式として機能しないとされていたが、圧密応力 ϕ を用いて巧妙に非回転圧密を解いていたことになる。

6. まとめ

- (1) 立方体の圧密及び球の圧密の解を示し、既発表の円柱の圧密及び中空円柱の圧密とあわせて、圧密応力を中心とした吉国の理論で非回転圧密の解を求めうることを示した。
- (2) 非回転圧密という限定された条件の圧密でも、多次元圧密の特徴が入っており、Terzaghi の一次元圧密理論が与える圧密の概念は、一般的な圧密の概念としては不十分であることを示した。たとえば、立方体の圧密において、排水方向が一次的であっても、変形方向が多次元的であったりすると、Terzaghi の解とは異なる。このとき圧密過程中に圧密応力 ϕ が変化しており、これが多次元圧密の基本的特徴である。
- (3) 非回転圧密においては、圧密応力は一般に $\phi = (1 + \alpha)p - \alpha \bar{u}$ と表わされ、圧密荷重が定荷重の場合には圧密方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \nabla^2 u - \frac{\alpha}{V} \frac{d}{dt} \int_V u dV$$

という形で表わされる。また、この無次元解は、間隙水圧の無次元量を U とするとき

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} C_i [D_0(\lambda_i \zeta) - D_0(\lambda_i \zeta)|_{\zeta=\zeta_p}] e^{-\lambda_i^2 r}$$

という形で表わされる。ここで $D_0(\lambda_i \zeta)$ は問題に応じた位置の関数で、 ζ_p は排水面の位置である。

- (4) 非回転圧密の解を求める際に補助的に使用した変数 $w (= u + \alpha \bar{u})$ は、物理的には最終体積ひずみから圧密過程の体積ひずみを引いたものである。見方を変えれば、一般的には圧密方程式として機能しないとされていた体積ひずみで表わされた圧密方程式を用い、圧密応力 ϕ の助けをかりて非回転圧密問題を解いている。

参 考 文 献

- 1) 吉国 洋 (1972) : 三次元圧密の基礎理論, 土木学会論文報告集, 第 201 号, pp.87 ~ 98
- 2) 田村 武 (1978) : Biot の圧密方程式に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第 274 号, pp.57 ~ 67
- 3) Kumamoto, N. and H. Yoshikuni (1981) : A Key to Solution of the Irrotational Consolidation and its Application to Cylindrical Clay, Soils and Foundations, Vol.21, No.2, pp.35 ~ 46
- 4) Yoshikuni, H. and N. Kumamoto (1984) : Study on the Irrotational Consolidation, Mitsubishi Heavy Industries, Ltd. TECHNICAL REVIEW, Vol. 21, No.2, SER. No.20, pp.87 ~ 95

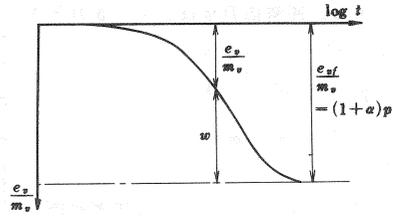


図 12. W の物理的意味