

軟化を考慮した正規圧密粘土の構成式

A STRAIN SOFTNING CONSTITUTIVE EQUATION of NORMARY CONSOLIDATED CLAY

原 久夫*(HARA Hisao)

Cam-Clay モデル, 修正 Cam-Clay モデルといった粘土の構成式では, せん断変形による軟化現象を表わせない。これを表現するために修正 Cam-Clay モデルの軟化パラメータを塑性体積ひずみと塑性せん断ひずみの和で与え, せん断変形に伴って降伏曲線が縮小する軟化型の弾塑性構成式を誘導した。

その誘導過程で修正 Cam-Clay モデルを複硬化則に従う弾塑性構成式として扱い, このモデルの降伏面の拡大, 移動に関する特徴を明らかにした。

誘導した軟化型弾塑性構成式の妥当性を, 異方圧密された正規圧密粘土の非排水せん断試験結果と比較して検証した。その結果, せん断初期には, 応力-ひずみ関係や間隙水圧-ひずみ関係に相違があるものの, ピーク強度に達した後の軟化挙動では実験値と計算値がよく一致することが確かめられた。このことから, 軟化挙動を示す粘土の変形解析にこのモデルが有用と考える。

キーワード: 粘土/土の構成式/圧密非排水せん断/弾性/塑性/応力-ひずみ曲線

1 まえがき

正規圧密粘土の変形挙動を説明するのによく使われる弾塑性モデルのひとつに修正 Cam-Clay モデルがある。このモデルではせん断変形が進み限界状態(CSL)に達すると, 応力や間隙比の変化がなくなりせん断変形のみが際限無く増大する。一方, 実際の正規圧密粘土の非排水せん断試験における応力ひずみ曲線では応力値にピーク値を有し, ひずみ軟化挙動を示すが普通である。この軟化挙動は修正 Cam-Clay 型の構成モデルでは表現できない。

ここでは, まず最初に弾塑性論の基礎に立ち返って修正 Cam-Clay モデルを再検討し直す。その過程でひずみ軟化を表現する新しい硬化パラメータを付加し, ひずみ軟化を考慮したモデルを誘導する。さらに新定数の決定方法や実験結果との照合結果について述べる。

2 塑性論

塑性論では物質の変形特性が時間に依存しない材料の非回復性の変形, つまり塑性変形を扱う。塑性変形を表現する弾塑性構成式は, 塑性変形の記述の仕方から二つに区分できる。ひとつは, 応力が降伏面に達した状態でのみ塑性変形が生じ, 降伏面内部は弾性域と仮定するものであり, 古典塑性論と呼ばれる。もうひとつは, 降伏面の内部においても塑性変形が生じるとするものであり繰返し塑性と呼ばれる。Cam-Clay 型(修正 Cam-Clay モデル¹⁾, 太田モデル²⁾等)の弾塑性構成式は前者に属し, 多面モデル(Mroz)³⁾, 下負荷面モデル(Hashiguti)⁴⁾, 森脇モデル⁵⁾等は後者である。

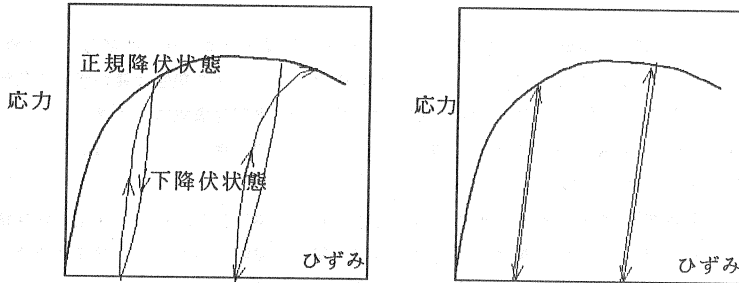
実粘土における正規降伏面内部での変形挙動には, 塑性成分のあることが実験的に確かめられている⁵⁾が, たとえば正規圧密粘土の非排水せん断試験のように応力が単調に増加し, 変形過程を通じていつでも降伏面が拡大していくときには, 前者と後者に差はない。ここで述べる軟化を考慮した構成モデルは, 修正 Cam-Clay モデルの拡張型で古典塑性論の立場に入り, 上述のような単調載荷に対して有効である。新モデルの改良

* 琉球大学工学部土木工学科 助手

点を明確にするため古典塑性論の概要⁶⁾を述べ、次に塑性論の立場からみた修正 Cam-Clay モデルの特徴を明らかにする。

2-1 古典塑性論の概要

図-1 は弾塑性変形における応力-ひずみ曲線で図-1 (a)は実測曲線、(b)はそれを古典塑性論で扱うときの単純化した関係である。除荷、再負荷時の包絡線に相当する変形状態を正規降伏状態あるいは単に降伏状態と称する。



(a) 実測

(b) 古典塑性論の理想化

図-1 弾塑性変形における応力-ひずみ曲線

2-2 降伏条件と降伏曲面

材料が正規降伏状態にあるための条件を次の式で与える。

$$f(\sigma, H_i) = 0 \quad (1)$$

ここで

f : 降伏関数

σ : 応力テンソル

H_i : 塑性履歴パラメータ、($i = 1, 2 \dots n$)

である。

H_i はその定義から次式を満たす。

$$\dot{\epsilon}^p = 0 \text{ の時、} \dot{H}_i = 0 \quad (2)$$

f が応力空間で作る曲面が正規降伏面であり、その内部で $f < 0$ となるように f を定める。

2-3 流動則

粘土が弾塑性状態にあり、さらにある有限な応力変化を与えられたとき生ずる塑性ひずみ速度の大きさは、応力速度に依存し、また塑性ひずみ速度の方向は応力状態に依存すると考えられる。これから塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^p$ は次式の流動則で与えられると仮定する。

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda m \quad (3)$$

ここで

m : 2階正規化テンソル。図-2 (b)、式(4)参照。

$$\| \mathbf{m} \| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{m}\mathbf{m}^t)} = \sqrt{m_{ij}m_{ij}} = 1$$

σ , H_i の関数で式 (4) で表わされる。

λ : 正值、スカラー量の比例係数で $\dot{\epsilon}^p$ の一次関数

である。

\mathbf{m} がスカラー関数 $g(\sigma, H_i)$ によって次式で与えられるとき、 g が応力空間でつくる曲面を塑性ポテンシャル面という。

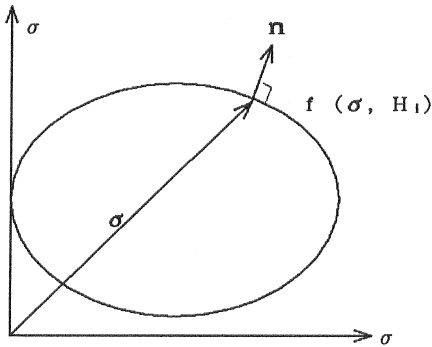
$$\mathbf{m} = \frac{\partial g}{\partial \sigma} / \left\| \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\| \quad (4)$$

特に降伏面 f が塑性ポテンシャル面 g に一致するとき、次の関連流動則が成立する。

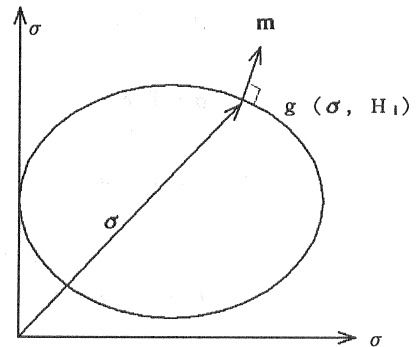
$$g(\sigma, H_i) = f(\sigma, H_i) \quad (5)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda \mathbf{n} \quad (6)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} / \left\| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\| \quad (7)$$



(a) 降伏面と \mathbf{n}



(b) 塑性ポテンシャルと \mathbf{m}

図-2 降伏面と塑性ポテンシャル面

2-4 適応条件

降伏条件式 (1) を時間微分して次の式を得る。

$$\text{tr} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial H_i} \dot{H}_i = 0 \quad (8)$$

(8) 式は正規降伏状態で成立すべき変数間の微分関係を示し、適応条件式と呼ばれている。

$\dot{\epsilon}^p = 0$ のとき、 $\dot{H}_i = 0$ であるので H_i は $\dot{\epsilon}^p$ を一次で含む。これと流動則より、

$$\dot{H}_i = \lambda h_i \quad (9)$$

と表わされる。ここで h_i は状態変数の関数である。

(8)、(9) 式より

$$\lambda = \text{tr}(\mathbf{n}\dot{\sigma}) / D \quad (10)$$

$$D = - \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial H_i} h_i / \left\| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\| \quad (11)$$

ここで $\dot{\sigma}$ は応力速度、スカラー D は塑性係数あるいは硬化係数である。

2-5 ひずみ速度と応力速度の関係

ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ は弾性成分 $\dot{\epsilon}^e$ と塑性成分 $\dot{\epsilon}^p$ の和で与えられると仮定する。

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (12)$$

弾性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^e$ は応力速度 $\dot{\sigma}$ に対し弾性係数テンソル E を使って次のように表わせる。

$$\dot{\epsilon}^e = E^{-1} \dot{\sigma} \quad (13)$$

$$\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon} \quad (14)$$

(12)、(13)、(3)、(10) 式より

$$\dot{\epsilon} = E^{-1} \dot{\sigma} + \frac{\text{tr}(\mathbf{n}\dot{\sigma})}{D} \mathbf{m} \quad (15)$$

or

$$\dot{\epsilon} = \left(E^{-1} + \frac{\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}}{D} \right) \dot{\sigma} \quad (16)$$

を得る。また (16) 式の逆として (17) 式を得る。

$$\dot{\sigma} = \left(E - \frac{(\mathbf{m}E) \otimes (\mathbf{n}E)}{D + \text{tr}(\mathbf{n}E\mathbf{m})} \right) \dot{\epsilon} \quad (17)$$

(16)、(17) 式における \otimes はジアド積で、ベクトル u, v のジアド積によって作られる 2 階テンソルの成分 $(u \otimes v)_{ij}$ は次式のようなものである。

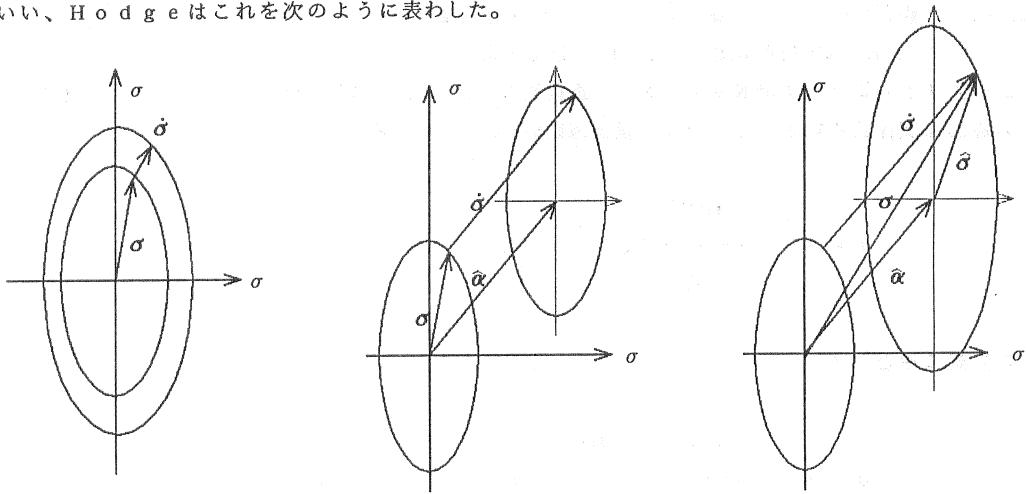
$$(u \otimes v)_{ij} = u_i v_j \quad (18)$$

(16), (17) 式は、降伏条件式 (1) と塑性ポテンシャル $g(\sigma, H_i)$ によって与えられる線形の弾塑性構成式である。次に修正 Cam-Clay モデルのタイプの弾塑性構成式の一般形式である Hodge の分離形式 (複合硬化) について若干述べ、その後修正 Cam-Clay モデルの構造について再検討する。

3 Hodge の分離形式

3-1 等方硬化、移動硬化、複合硬化則

図-3 は弾塑性変形中の降伏面の拡大、移動の様子を示している。応力空間内で降伏面の形が相似形を保ちながら拡大、縮小し、その中心も不動であるときこれを等方硬化則 (図(a))、大きさの変化なしに降伏面が移動するときこれを移動硬化則 (図(b)) という。この両者が同時にある場合これを複合硬化則 (図(c)) といひ、Hodge はこれを次のように表わした。



(a) 等方硬化則

(b) 移動硬化則

(c) 複合硬化則

図-3 等方硬化、移動硬化、複合硬化則による降伏面の変化

3-2 Hodge の分離形式による複合硬化則の表示

正規降伏条件式 (1) において塑性履歴パラメータ H_i を次のようにおく。

$$\begin{aligned} H_1 &= \hat{\alpha} \\ H_2 &= H \\ H_3 &= H_4 = \dots = H_n = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

(1), (19) 式より次の降伏条件式が得られる。

$$f(\hat{\sigma}) - F(H) = 0 \quad (20)$$

$$\hat{\sigma} = \sigma - \hat{\alpha} \quad (21)$$

ここで $\hat{\alpha}$: 移動硬化を表わす応力パラメータ (降伏面の平行移動)
 H : 等方硬化を表わす硬化パラメータ (降伏面の拡大)
 $f(\hat{\sigma})$: 負荷関数
 F : 硬化関数

である。

Hodge は $\hat{\alpha}$, H を使って (20) 式のように等方硬化と移動硬化を表わした。

$\hat{\alpha}$ の発展式の代表的のものとして Prager 式 (22) や Ziegler 式 (23) などがあり、Cam clay タイプのモデルでは 4-1 節で導かれるように (24) 式のような発展式となる。

$$\text{Prager} \quad \dot{\hat{\alpha}} = K_p \dot{\epsilon}^p \quad (22)$$

$$\text{Ziegler} \quad \dot{\hat{\alpha}} = \dot{K}_z \hat{\alpha} \quad (23)$$

$$\text{Cam-Clay, 修正Cam-Clay} \quad \dot{\hat{\alpha}} = K_{cam} \text{tr}(\dot{\epsilon}^p) \mathbf{I}, \mathbf{I} : \text{単位テンソル} \quad (24)$$

ここで、 K_p , K_{cam} は材料定数、 \dot{K}_z は $\dot{\epsilon}^p$ の関数である。

2 節の方法と同様にして計算をすすめると最終的に (20) 式の降伏条件に対して次のひずみ速度と応力速度の線形な関係式を得る。ここでは、関連流動則を仮定している。

$$\dot{\epsilon} = \left(E^{-1} + \frac{\hat{n} \otimes \hat{n}}{\hat{D}} \right) \hat{\sigma} \quad (25)$$

(25) 式の逆として

$$\hat{\sigma} = \left(E - \frac{(\hat{n}E) \otimes (\hat{n}E)}{\hat{D} + \text{tr}(\hat{n}E\hat{n})} \right) \dot{\epsilon} \quad (26)$$

が得られる。ここで \hat{n} , \hat{D} , h は次のようである。

$$\hat{n} = \frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}} / \left\| \frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}} \right\| \quad (27)$$

$$\hat{D} = \frac{F' h}{\left\| \frac{\partial f(\hat{\sigma})}{\partial \hat{\sigma}} \right\|} + \text{tr}(\hat{n}\hat{\alpha}) \quad (28)$$

$$\hat{H} = \lambda h \quad (29)$$

4 修正Cam-Clayモデル

4-1 修正 Cam-Clay モデルの複合硬化モデルとしての表示

有効応力で表示した平均応力 p と偏差応力 q の応力平面上で、修正 Cam-Clay モデルの降伏曲線は式 (30) の楕円の式で表わされる。

$$(p - p_y/2)^2 + (q/\eta_f)^2 = (p_y/2)^2 \quad (30)$$

今、応力が降伏曲線上の点 A (p_A, q_A) にあった要素に $\hat{\sigma}$ が作用し、点 B (p_B, q_B) に移った場合を考える。このとき修正 Cam-Clay モデルでは、もとの降伏曲面 A は降伏曲面 B に拡大すると同時に楕円の中心の移動も生じている。このような硬化形式の場合、3 節で述べた Hodge の分離形式として扱った方が便利である。そこで以下に修正 Cam-Clay モデルを複合硬化則に従うモデルとして表現することを試みる。これによってこのモデルの弾塑性体としての特徴が明らかとなる。

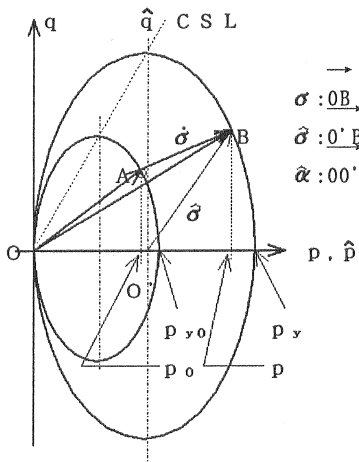


図-4 修正 Cam-Clay モデルの降伏面の拡大と移動

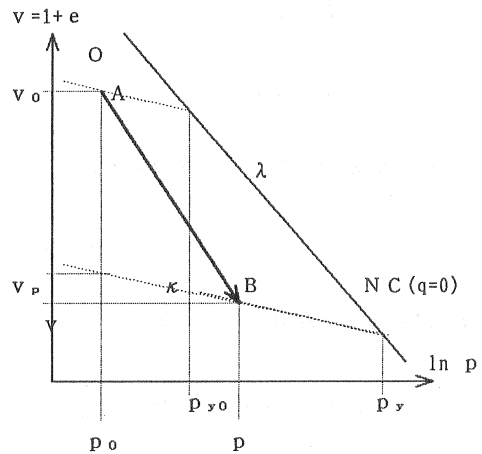


図-5 p_y, p_{y0} と正規圧密線の関係

(30) 式の右辺を移項し、 p, q を σ の不変量で表示すると(20)式に対応する降伏条件式が得られる。このとき、修正 Cam-Clay モデルの場合の負荷関数 f 、硬化関数 F 、移動テンソル $\hat{\alpha}$ (図-4 参照) は次式のようになる。

$$f(\hat{\sigma}) = \hat{I}_\sigma^2 + \hat{II}_\sigma^*/M^2 \quad (31)$$

$$F(H) = (p_y/2)^2 \quad (32)$$

$$\hat{\alpha} = p_y \mathbf{I}/2 \quad (33)$$

(32) 式中の硬化パラメータは塑性体積ひずみで与えられ(34)式のようになる。 p_y は(35)式で与えられる応力パラメータで、降伏曲面の拡大と中心の移動の両方に関連する量となっている。

$$H = \varepsilon_p^p \quad (34)$$

$$p_y = p_{y0} \exp[-v_0 \varepsilon^p / (\lambda - \kappa)] \quad (35)$$

ここで

$\hat{I}_\sigma, \hat{II}_\sigma$: $\hat{\sigma}$ の一次不変量、 $\hat{\sigma}$ の二次不変量

$\hat{\sigma}^*$: $\hat{\sigma}$ の偏差テンソル

p_{y0}, p_y : 図-5 参照。代表降伏応力、降伏曲線と p 軸との交点の p 値

M : CSL 上での $\sqrt{\hat{II}_\sigma} / I_\sigma$ の値 ($M = \eta_f / 3\sqrt{3}$)

である。

(20), (21), (31) - (35) 式より最終的に (36)、(37) 式の応力速度とひずみ速度の関係式を得る。

$$\dot{\varepsilon} = M^{-1} \dot{\sigma} \quad (36)$$

$$\dot{\sigma} = M \dot{\varepsilon} \quad (37)$$

(37) 式の弾塑性マトリックス M は 4 階のテンソルでその成分は以下のものである。

$$M_{ijkl} = E_{ijkl} - n_{op} n_{qr} E_{ijop} E_{klqr} / (\hat{D} - n_{st} n_{uv} E_{stuv}) \quad (38)$$

(38) 式の各項は次のようである。

$$n_{ij} = (\partial f / \partial \hat{\sigma})_{ij} / \left\| \partial f / \partial \hat{\sigma} \right\| \quad (39)$$

$$(\partial f / \partial \hat{\sigma})_{ij} = 2 \hat{I}_\sigma \delta_{ij} + (\hat{\sigma}^*)_{ij} / M^2 \quad (40)$$

$$\hat{D} = F' h / \left\| \partial f / \partial \hat{\sigma} \right\| + \text{tr}(\hat{n} \hat{\alpha}) \quad (41)$$

$$F' = \frac{dF}{dH} = \frac{2v_0}{\lambda - \kappa} \quad (42)$$

$$h = \text{tr}(\hat{n}) \quad (43)$$

以上が修正 Cam-Clay モデルを複合硬化則モデルとして表示した構成式であるが、これまでのことから、降伏面の拡大、移動の法則にこのモデルの特徴があることが分かる。具体的には、降伏面の中心 (図-4 O' 点) が常に等方応力線上にあり、また相似の中心 (図-4 O 点) は原点に固定されていることである。そして一個の応力パラメータ p_y が、本来は独立であるべき移動、拡大の二つの硬化形式の両方に係わっているため、この両者の独立性が保たれていない。このことは、修正 Cam-Clay モデルの利点 (パラメータ数を少なくできる) であると同時に降伏面の移動、拡大に対する拘束にもなっている。

4-2 軟化を考慮した修正 Cam-Clay モデル

修正 Cam-Clay モデルの等方硬化成分は(34)式で示したように塑性体積ひずみによって与えられている。正規圧密粘土を非排水せん断した場合、 \dot{p} が負であるためこの塑性体積ひずみは単調に増加し、それに応じて降伏面も単調に拡大し、軟化挙動を表現することができない。そこで、硬化パラメータとして偏差塑性ひずみ成分も取り入れHを次のように仮定する。

$$H = \varepsilon^p + C \| \varepsilon^{p*} \| \quad (44)$$

ここで C : 軟化係数
 ε^{p*} : 偏差塑性ひずみ

である。

(44) 式の時間微分をとってhを求めると以下のようなになる。

$$\dot{h} = \text{tr}(\dot{\hat{n}}) + c \| \dot{\hat{n}}^* \| \quad (45)$$

$$\dot{\hat{n}}^* = \dot{\hat{n}} - \mathbf{I} \text{tr}(\dot{\hat{n}}) / 3 \quad (46)$$

この硬化パラメータをとり入れると、軟化型の修正 Cam-Clay モデルに拡張することができる。

4-3 計算値と実験値との比較

この新しい軟化係数Cを使って 表-1 島尻粘土の諸特性値と実験条件、計算パラメータ
 正規圧密粘土の非排水せん断挙動を計算してみた例を図6に示す。

図-6 (a) は応力ひずみ関係、(b) は間隙水圧ひずみ関係、(c) は非排水ストレスパスである。図中のマーク付き曲線が実験値で、実線はここでのモデルによって計算したものである。実験に使用し

番号	弾塑性パラメータ					p _A	q _A	η _A /η _f
	λ	κ	η _f	e _N	C			
CI00			1.20			1.900	0	0
CA18	0.170	0.026	1.25	2.04	-0.03	1.612	0.361	0.179
CA49			1.15			1.210	0.746	0.493
w _l = 60% IP = 54% ρ _s = 2.78								
粘土分 : 52% シルト分 : 41% 砂分 : 7%								

た粘土は練り返し再圧密した島尻粘土で、その諸特性値および計算に用いた弾塑性パラメータは表-1の通りである。この粘土を異方圧密した後、軸ひずみ速度 1/100%/min で非排水せん断した例である。実験番号の2桁の数字はせん断開始前の応力比ηのη_fに対する比で異方圧密の程度を表わしている。

実験値と計算結果を比較してみると、応力ひずみ関係、間隙水圧ひずみ関係ともにせん断初期での相違が大きいことがわかる。これは、修正 Cam-Clay モデルでは応力比が小さいとき降伏面の法線の勾配が過少という降伏面形状の不適切さによっており、今後改良すべき点であろう。一方ピーク強度以降の軟化過程に入ってから応力ひずみ曲線は実験値とよく一致している。また間隙水圧は軟化過程においても上昇することがわかる。

この計算において、軟化係数 C は軟化挙動に入った後の応力-ひずみ曲線の勾配に合うよう試行錯誤で決定した。またせん断弾性係数 G は変形の全過程を通じて一定と仮定した。

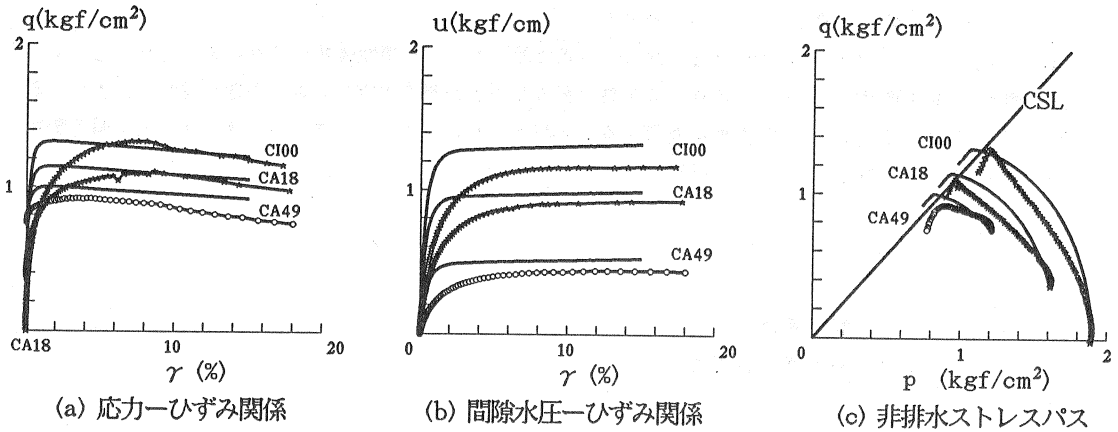


図-6 軟化型修正 Cam-Clay モデルによる計算結果と実験値の比較

5 まとめ

本論文において修正 Cam-Clay モデルを複合硬化則に従う弾塑性構成モデルとして構成式の定式化を試みた。その結果修正 Cam-Clay モデルの特徴、特に p_s の持つ意味が明らかになった。さらに、硬化パラメータに塑性せん断ひずみを取り入れ、修正 Cam-Clay モデルで軟化を表現できるようにモデルを拡張した。このモデルによれば、正規圧密粘土のせん断挙動をより現実に近い形で表わすことができる。

謝辞 本論文は広島大学研修期間中にまとめたものです。このチャンスを与えてくださいました琉球大学 上原 方成 教授、それを快く受け入れていただきました広島大学 吉國 洋 教授に感謝いたします。またなにかにつけ相談にのっていただきました同大学土質研究質の日下部 治 教授、森脇 武夫 助手、池上 慎司 助手、中電技術コンサルタント(株) 住岡 宣博 氏、精力的に実験を実行してくれた琉球大学学生諸君に記してお礼申し上げます。

参考文献

- 1) Roscoe, K. H. and Burland, J. B. (1968): "On the Generalised Stress-Strain Behavior of 'Wet' Clay", in Engineering Plasticity, eds. J. Heyman and F. A. Leckie, Cambridge University Press, pp535-609
- 2) H. Ohta and S. Hata (1971): "On the State Surface of Anisotropically Consolidated Clay", Proc., JSCE, vol. 196, pp117-124
- 3) Mroz, Z., Norris, V. A. and Zienkiewicz, O. C. (1981): "An anisotropic, critical state model for soils subject to cyclic loading.", Geotechnique, vol. 31, pp451-469
- 4) Hashiguchi, K. and Ueno, M. (1977): "Elastoplastic constitutive laws of granular materials, Constitutive Equations of Soils (Proc. 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Spec. 9, Murayama, S. and Schofield, A. N. eds.), Tokyo, JSSMFE, pp73-82
- 5) 森脇武夫(1988): "異方圧密粘土の変形特性とその構成式", 広島大学学位論文
- 6) 橋口公一(1990): 最新 弾塑性学 朝倉書店